



# Evolution de fronts avec vitesse non-locale et équations de Hamilton-Jacobi

Olivier Ley

## ► To cite this version:

Olivier Ley. Evolution de fronts avec vitesse non-locale et équations de Hamilton-Jacobi. Mathématiques [math]. Université François Rabelais - Tours, 2008. tel-00362409

**HAL Id: tel-00362409**

**<https://theses.hal.science/tel-00362409>**

Submitted on 18 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

## Évolution de fronts avec vitesse non-locale et équations de Hamilton-Jacobi

présentée et soutenue publiquement le 8 décembre 2008 par

**Olivier Ley**

Rapporteurs :

<b>Grégoire ALLAIRE</b>	Professeur	École Polytechnique, Palaiseau
<b>Piermarco CANNARSA</b>	Professeur	Université de Rome “Tor Vergata”
<b>Lawrence Craig EVANS</b>	Professeur	University of California, Berkeley

Composition du jury :

<b>Grégoire ALLAIRE</b>	Professeur	École Polytechnique, Palaiseau
<b>Guy BARLES</b>	Professeur	Université François Rabelais Tours
<b>Piermarco CANNARSA</b>	Professeur	Université de Rome “Tor Vergata”
<b>Antonin CHAMBOLLE</b>	Directeur de Recherche	École Polytechnique, Palaiseau
<b>François HAMEL</b>	Professeur	Université d’Aix-Marseille III
<b>François JAMES</b>	Professeur	Université d’Orléans
<b>Luc MOLINET</b>	Professeur	Université François Rabelais Tours



# ÉVOLUTION DE FRONTS AVEC VITESSE NON-LOCALE ET ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI

OLIVIER LEY

## TABLE DES MATIÈRES

Résumé	3
Remerciements	5
Avant-Propos	7
1. Introduction	9
1.1. Évolution de fronts et équations de Hamilton-Jacobi	9
1.2. Évolution de fronts apparaissant dans des problèmes d'optimisation de formes	12
1.3. Équation de Hamilton-Jacobi, contrôle stochastique et homogénéisation de systèmes	15
1.4. Inégalité de Łojasiewicz pour des fonctions convexes et liens avec le flot de gradient	19
2. Propagation de fronts avec vitesse normale prescrite	20
2.1. L'approche par lignes de niveaux	21
2.2. Résultats d'unicité pour l'équation de courbure moyenne des graphes	24
2.2.1. Position du problème et travaux effectués dans la thèse	24
2.2.2. Description du cas "convexe à l'infini"	26
2.2.3. Le cas radial	27
2.2.4. Commentaires et perspectives	28
2.3. Équation de Hamilton-Jacobi non-locales non-monotones apparaissant en dynamique des dislocations et pour un modèle de FitzHugh-Nagumo	28
2.3.1. La dynamique des dislocations	28
2.3.2. Un système apparaissant dans un modèle de FitzHugh-Nagumo	29
2.3.3. Définition de solutions faibles	31
2.3.4. Rappel sur l'équation eikonale et borne inférieure de gradient	32
2.3.5. Existence de solutions faibles et solutions classiques	33
2.3.6. Un contre-exemple à l'unicité en général	34
2.3.7. Résultats d'unicité pour les équations de Hamilton-Jacobi non-locales non-monotones	35
2.3.8. Éléments de preuve des théorèmes d'unicité	36
2.3.9. Commentaires et perspectives	40
2.4. Problèmes d'évolution de front apparaissant en optimisation de forme	40
2.4.1. Les solutions de viscosité géométriques	41
2.4.2. Construction de solutions de viscosité géométriques pour le problème d'évolution	43
2.4.3. Esquisse de la preuve du principe d'inclusion	44
2.4.4. Convergence vers l'équilibre	47
2.4.5. Décroissance de l'énergie le long de l'évolution	48
2.4.6. Commentaires et perspectives	48
3. Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman	49
3.1. Unicité pour des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman reliées à des problèmes de contrôle stochastique non-bornés	49

3.2. Homogénéisation de systèmes monotones d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre	51
3.3. Références, commentaires et perspectives	51
4. Inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz, trajectoires de gradient et fonctions convexes	52
4.1. Caractérisation de l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz à l'aide des trajectoires de gradient	52
4.2. Longueur des trajectoires de gradient d'une fonction quasiconvexe dans le plan	56
4.3. Commentaires et perspectives	59
5. Notations	60
Liste de mes travaux	61
Bibliographie générale	63

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente mes travaux de recherche effectués après ma thèse, entre 2002 et 2008. Les thèmes principaux sont les équations aux dérivées partielles non-linéaires et des problèmes d'évolutions de fronts ou d'interfaces. Il est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre concerne l'évolution de fronts avec une vitesse normale prescrite. Pour étudier ce genre de problème, une première approche, dite par lignes de niveaux, consiste à représenter le front comme une ligne de niveau d'une fonction auxiliaire  $u$ . Cette approche ramène l'étude du problème d'évolution géométrique à un problème d'EDP puisque  $u$  vérifie une équation de Hamilton-Jacobi. Quelques résultats dans le cas de vitesses locales comme la courbure moyenne sont présentés mais la majorité des résultats concerne le cas de vitesses non-locales décrivant la dynamique des dislocations dans un cristal ou modélisant l'asymptotique d'un système de FitzHugh-Nagumo apparaissant en biologie. Une approche différente, basée sur des solutions de viscosité géométriques, est utilisée pour étudier des problèmes de propagation de fronts apparaissant en optimisation de formes. Le but est de trouver un ensemble optimal minimisant une énergie du type capacité à volume ou périmètre constant. L'idée est de déformer le bord d'un ensemble donné avec une vitesse normale adéquate de manière à diminuer au plus son énergie. La mise en oeuvre de cette idée nécessite la construction rigoureuse d'une telle évolution pour tout temps et la preuve de la convergence vers une solution du problème initial. De plus, la décroissance de l'énergie est obtenue le long du flot.

Le deuxième chapitre décrit des résultats d'unicité, d'existence et d'homogénéisation pour des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. La majeure partie du travail effectué concerne des équations provenant de problèmes de contrôle stochastique avec des contrôles non-bornés. Les équations comportent alors des termes quadratiques par rapport au gradient et les solutions étudiées sont elles-mêmes à croissance quadratique. Des liens entre ces solutions et les fonctions valeurs des problèmes de contrôle correspondants sont établis. La seconde partie est consacrée à un théorème d'homogénéisation pour un système d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre.

Le troisième et dernier chapitre traite d'un sujet un peu à part, à savoir le lien entre les flots de gradient et l'inégalité de Łojasiewicz. La principale originalité de ce travail est de placer l'étude dans un cadre hilbertien pour des fonctions semiconvexes, ce qui sort du cadre de l'inégalité de Łojasiewicz classique. Le principal théorème produit des caractérisations de cette inégalité. Les résultats peuvent être précisés dans le cas des fonctions convexes; en particulier, un contre-exemple de fonction convexe ne vérifiant pas l'inégalité de Łojasiewicz est construit. Cette dernière inégalité est reliée à la longueur des trajectoires de gradient. Une borne de cette longueur est obtenue pour les fonctions convexes coercives en dimension deux même lorsque cette inégalité n'est pas vérifiée.



## REMERCIEMENTS

Je suis très heureux de pouvoir remercier ici Guy Barles et Pierre Cardaliaguet. Guy a dirigé ma thèse et j'ai la chance de pouvoir continuer à travailler avec lui et bénéficier de ses conseils de valeur. J'ai rencontré Pierre à la fin de ma thèse et immédiatement, il m'a fait part de quelques unes de ses idées prolifiques qui ont initié une collaboration dynamique et agréable. Travailler avec deux mathématiciens de ce niveau est une grande chance. J'ai appris énormément de choses à leur contact.

Grégoire Allaire, Piermarco Cannarsa et Lawrence Craig Evans ont pris de leur temps précieux pour se pencher sur mes travaux. Depuis que j'ai commencé à faire de la recherche, j'ai souvent parcouru les publications de ces mathématiciens de haute renommée qui m'ont inspiré et permis d'avancer. C'est un grand honneur qu'ils aient accepté d'écrire les rapports et je les en remercie.

Je suis très reconnaissant à Antonin Chambolle, François Hamel, François James et Luc Molinet pour avoir tout de suite accepté de faire partie du jury.

J'ai la chance d'avoir pu travailler dans d'excellentes conditions à l'université de Tours au sein du laboratoire et du département. Un grand merci à tous mes collègues (mathématiciens et physiciens) pour l'ambiance agréable qui y règne. Je voudrais remercier en particulier mon collègue de bureau Emmanuel Chasseigne qui me supporte chaque jour, Christine Georgelin et Marc Peigné pour leur gestion sympathique et avisée du département, Jean-Michel Fransès, Saïd Ilias et Natacha Sandier aux côtés de qui c'est un plaisir d'enseigner, Anne-Marie Chenais et Bernadette Vallée pour leur aide précieuse dans toutes les tâches administratives, Laurent Mazet (ex-tourangeau) et Stéphane Sabourau avec qui je partage repas et mathématiques, Hector Giacomini, Emmanuel Lesigne et Martin Traizet qui ont toujours un moment pour discuter mathématiques et enfin Guy Morel qui a toujours un moment pour discuter tout court.

Je suis très fier d'avoir déjà pu travailler avec un grand nombre de mathématiciens que j'apprécie et j'estime. Je remercie mes collaborateurs que je n'ai pas encore eu l'occasion de citer : Francesca Da Lio que j'ai connue pendant ma thèse et avec qui j'ai toujours plaisir à travailler, Aris Daniilidis et Jérôme Bolte qui m'ont initié au sujet passionnant de l'inégalité de Łojasiewicz, Marc Dambrine qui a encore beaucoup à m'apprendre sur l'optimisation de formes, Régis Monneau qui nous a fait découvrir les dislocations, Élisabeth Rouy qui a dirigé l'ACI nous permettant de débiter les travaux sur les vitesses non-locales, Aurélien Monteillet qui est un compagnon de travail efficace et agréable, Shigeo Koike avec qui j'ai toujours passé de bons moments au Japon et mes amis romains Fabio Camilli, Fabiana Leoni et Paola Loreti.

Je n'oublie pas non plus mes anciens condisciples Henri Anciaux, Thierry Champion, Erwann Delay, Éric Dumas, Cyril Imbert, Benoît Rittaud, Laurent Vivier et je remercie tout particulièrement Mokhtar Hassaine qui, depuis le Chili, a entrepris une relecture soigneuse et exigeante de ce manuscrit ce qui a permis de l'améliorer sur bon nombre de points.

Enfin, j'ai une pensée pour Céline et Victor qui ont essayé, par tous les moyens, de m'éloigner de ma table de travail durant la rédaction de ce mémoire en août 2008.





## AVANT-PROPOS

Ce mémoire présente les travaux réalisés depuis la fin de ma thèse entre 2002 et 2008 en occupant un poste de maître de conférences au Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique de l'université François Rabelais de Tours. La liste complète de mes travaux se trouve page 61 et ces derniers apparaissent entre crochets dans le texte, numérotés de 1 à 20. Les références de 1 à 6 sont celles d'articles écrits pendant ma thèse, soutenue en décembre 2001 sous la direction de Guy Barles. Les travaux numérotés de 7 à 20 sont ceux que je décris dans ce mémoire et qui constitue mon Habilitation à Diriger des Recherches. Les références entre crochets notées avec des lettres sont celles de la bibliographie générale qui figure à la fin.

La notion de solutions de viscosité occupe une place centrale dans mes travaux. Comme cette théorie est maintenant bien connue et qu'il existe une littérature abondante sur le sujet, j'ai choisi de ne pas la présenter pour ne pas rallonger le texte. Je renvoie le lecteur aux ouvrages de Barles [Bar94], Bardi et Capuzzo Dolcetta [BCD97] pour les équations du premier ordre. Même s'il manque encore un traité récent et complet sur le second ordre, on pourra consulter le célèbre "User's guide" de Crandall, Ishii et Lions [CIL92], les livres de Fleming et Soner [FS93] et Koike [Koi04] et le cours de Barles [Bar97].



## 1. INTRODUCTION

Mes résultats sont décrits précisément dans les paragraphes qui suivent. Dans cette introduction, quitte à sacrifier un peu à la rigueur mathématique, j'expose les grandes lignes des problèmes étudiés.

**1.1. Évolution de fronts et équations de Hamilton-Jacobi.** Les sujets centraux de cette thèse sont les évolutions de fronts (ou d'hypersurfaces) avec une vitesse normale prescrite et les équations de Hamilton-Jacobi. Un lien entre ces deux notions apparaît naturellement quand on utilise l'approche par lignes de niveaux pour étudier l'évolution d'un ouvert  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^N$  dont le bord  $\Gamma_t$  (le front) évolue avec une vitesse normale donnée.

L'approche par lignes de niveaux est un outil central dans mon travail et est présentée en détail dans le § 2 (on trouvera aussi les références principales sur le sujet). Donnons-en tout de suite une idée qui permet d'éclairer le lien avec les équations aux dérivées partielles (EDP dans la suite). Imaginons que tout point  $x$  du front  $\Gamma_t$  évolue avec une vitesse  $\mathcal{V}_{\Omega_t}(x) \vec{n}_{\Omega_t}(x)$ , où  $\vec{n}_{\Omega_t}(x)$  est la normale unitaire sortante de  $\Gamma_t$  au point  $x$  ( $\Gamma_t$  est "orienté" par son "intérieur"  $\Omega_t$ ). L'idée est alors d'introduire une fonction auxiliaire  $u : \mathbb{R}^N \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dans le but de représenter  $\Gamma_t$  *via* l'ensemble de niveau 0 de celle-ci. Cela conduit à définir  $u$  telle que

Pour tous  $t \geq 0$ ,  $u(\cdot, t) = 0$  sur  $\Gamma_t$ ,  $u(\cdot, t) > 0$  dans  $\Omega_t$  et  $u(\cdot, t) < 0$  ailleurs.

La fonction  $u(\cdot, t)$  ainsi définie est constante sur  $\Gamma_t$ ; un simple calcul donne alors les relations suivantes :

$$\vec{n}_{\Omega_t}(x) = -\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{\Omega_t}(x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)}{|Du(x, t)|} \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_t$$

(les signes viennent de l'orientation de  $\Gamma_t$  qui est traduite par le choix du signe de  $u$  dans  $\Omega_t$ ). On en déduit alors l'EDP

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \mathcal{V}_{\{u(\cdot, t) > 0\}}(x) |Du(x, t)| \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_t.$$

Cette EDP est posée *a priori* sur  $\Gamma_t$  mais, pour les vitesses que l'on considère, on peut l'étendre sur  $\mathbb{R}^N \times (0, T]$  où  $T$  est un temps final (qui sera souvent  $+\infty$ ). Ce problème d'évolution est appelée équation géométrique associée à la vitesse  $\mathcal{V}$  et est complété par une donnée initiale en  $t = 0$  qui représente le front initial ( $\Omega_0$  est une donnée du problème). Si l'on est capable de résoudre cette équation, on espère pouvoir retrouver l'objet géométrique  $\Gamma_t$  en posant

$$\Gamma_t := \{u(\cdot, t) = 0\} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

À ce niveau, il convient de préciser que, même pour les évolutions les plus simples qu'on puisse imaginer, les ensembles développent des singularités en temps fini ou même des changements de topologie. Parallèlement, on ne peut espérer trouver des solutions régulières à l'équation (1.1). On utilisera donc les solutions de viscosité pour résoudre (1.1) qui sont des solutions faibles qui conviennent bien à ce genre de problèmes fortement non-linéaires.

Selon les vitesses considérées, l'équation (1.1) prend diverses formes. Rappelons les plus courantes et celles qui seront plus particulièrement l'objet de notre attention.

Le cas le plus simple est celui d'une vitesse ne dépendant que du point  $x$  considéré et du temps  $t$ , *i.e.*,  $\mathcal{V}_{\{u(\cdot, t) > 0\}}(x) = c(x, t)$  où  $c : \mathbb{R}^N \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée. Dans ce cas, (1.1) se réduit à une des équations de Hamilton-Jacobi les plus simples, l'équation eikonale

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c(x, t)|Du(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T].$$

Malgré sa simplicité et sa longue histoire, cette équation est encore au centre de nombreux développements. En particulier nous avons dû en étudier des propriétés très fines pour avancer dans la compréhension de la dynamique des dislocations ou de problèmes du type FitzHugh-Nagumo.

Le second cas, peut-être le plus célèbre, qui a été à l'origine du développement de l'approche par lignes de niveaux, est celui de l'évolution d'hypersurfaces par courbure moyenne. Si  $\mathcal{V}_{\Omega_t}(x)$  est la moyenne des courbures principales de  $\Gamma_t$  au point  $x$ , (1.1) devient une EDP parabolique dégénérée singulière du second ordre, l'équation de la courbure moyenne

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u - \frac{\langle D^2 u Du, Du \rangle}{|Du|^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T].$$

Cette équation a occupé une grande partie de mon travail de thèse. Nous avons cherché à démontrer l'unicité de solutions, sans conditions de croissances à l'infini, de l'équation de courbure moyenne des graphes

$$(1.4) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \Delta v - \frac{\langle D^2 v Dv, Dv \rangle}{1 + |Dv|^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T]$$

en utilisant les propriétés géométriques de cette équation ; en effet, si  $v$  est solution de (1.4), alors  $u(x, y, t) = v(x, t) - y$  est solution de (1.3) dans  $\mathbb{R}^{N+1} \times [0, T]$ , ce qui signifie que le graphe de  $v$  peut être vu comme un front évoluant par courbure moyenne dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ . Cette interprétation nous a permis d'obtenir plusieurs résultats que nous rappellerons brièvement pour décrire nos résultats les plus récents.

Considérons maintenant le cas de vitesses non-locales qui sont au coeur de mon travail. Nous supposons que la vitesse gouvernant l'évolution du front a la forme suivante

$$(1.5) \quad \mathcal{V}_{\Omega_t}(x) = \alpha(k \star \mathbb{1}_{\overline{\Omega_t}}(x, t)) + c_1(x, t)$$

où  $c_1$  est une vitesse du type de celle apparaissant dans (1.2),  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée, " $\star$ " représente une convolution à préciser entre un noyau  $k$  et la fonction caractéristique de l'ensemble  $\overline{\Omega_t}$ . La vitesse écrite sous cette forme n'est pas la plus générale possible mais nous nous restreindrons à cette forme qui englobe deux cas modèles qui nous intéressent.

Notons tout de suite que cette vitesse est non-locale dans le sens où la vitesse  $\mathcal{V}_{\Omega_t}(x)$  ne dépend pas seulement des propriétés locales (normale, courbure, etc.) de  $\Gamma_t$  au point  $x$  mais, *via* la convolution, de l'ensemble  $\Omega_t$  tout entier. Ceci introduit bien sûr une difficulté de taille pour l'étude de ce genre de problèmes d'évolution. Pour simplifier les notations et mettre en avant la dépendance non-locale par rapport à l'ensemble par le biais de sa fonction caractéristique, nous écrirons

$$(1.6) \quad c[\mathbb{1}_{\overline{\Omega_t}}](x, t) := \mathcal{V}_{\Omega_t}(x) = \alpha(k \star \mathbb{1}_{\overline{\Omega_t}}(x, t)) + c_1(x, t).$$

Nous considérerons ici deux problèmes modèles où la vitesse peut s'écrire sous la forme (1.5). Le premier est la dynamique des dislocations (voir § 2.3.1 pour des précisions) pour laquelle

$$(1.7) \quad c[\mathbb{1}_{\overline{\Omega}_t}](x, t) = c_0 \star \mathbb{1}_{\overline{\Omega}_t}(x) + c_1(x, t),$$

avec une convolution en espace seulement :  $c_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$  et

$$(1.8) \quad c_0 \star \mathbb{1}_{\overline{\Omega}_t}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} c_0(x - y) \mathbb{1}_{\overline{\Omega}_t}(y) dy.$$

L'équation géométrique associée est alors une équation eikonale non-locale,

$$(1.9) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c[\mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}](x, t) |Du(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T].$$

Le second problème modélise l'asymptotique d'un système de FitzHugh-Nagumo (à ce sujet, quelques précisions sont données dans le § 2.3.2). Dans ce cas,

$$c[\mathbb{1}_{\overline{\Omega}_t}](x, t) = \alpha(v(x, t)),$$

où  $\alpha$  est une fonction réelle lipschitzienne et  $v$  est elle-même solution d'une équation du type (pour simplifier)

$$(1.10) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \mathbb{1}_{\overline{\Omega}_t} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T).$$

En utilisant la formule de représentation pour l'équation de la chaleur (avec donnée initiale nulle), on en déduit

$$(1.11) \quad v(x, t) = G \star \mathbb{1}_{\overline{\Omega}_t}(x, t),$$

où “ $\star$ ” est la convolution usuelle (en espace-temps) et  $G$  est le noyau de Green classique. On obtient bien alors une vitesse du type (1.5) et l'équation géométrique associée s'écrit comme (1.9) avec

$$(1.12) \quad c[\mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}](x, t) = \alpha(G \star \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}(x, t)).$$

Les problèmes d'évolutions de fronts ci-dessus (qu'ils soient locaux ou non-locaux) peuvent être rangés dans deux classes suivant que l'évolution est monotone ou pas.

Les évolutions monotones sont celles où le principe d'inclusion est vérifié. Cela signifie que si l'on démarre de deux ensembles  $\Omega_0^1$  et  $\Omega_0^2$  satisfaisant  $\Omega_0^1 \subset \Omega_0^2$  et qu'on les fait évoluer indépendamment avec la même vitesse, on a

$$(1.13) \quad \Omega_0^1 \subset \Omega_0^2 \implies \Omega_t^1 \subset \Omega_t^2 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Au moins formellement, le principe d'inclusion est vrai pour des vitesses vérifiant la propriété suivante :

$$(1.14) \quad \Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{R}^N \text{ et } x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega' \implies \mathcal{V}_\Omega(x) \leq \mathcal{V}_{\Omega'}(x).$$

Par exemple, cette propriété est vérifiée pour le mouvement par courbure moyenne et pour le mouvement traduit par (1.2). C'est également le cas pour les problèmes d'évolution reliés à l'optimisation de formes dont je parle dans la suite. En utilisant l'approche par lignes

de niveaux et en notant  $u^1$  la solution de (1.1) représentant  $\Omega^1$  et  $u^2$  celle représentant  $\Omega^2$ , le principe d'inclusion (1.13) se traduit par

$$\{u_0^1 \geq 0\} \subset \{u_0^2 \geq 0\} \implies \{u^1(\cdot, t) \geq 0\} \subset \{u^2(\cdot, t) \geq 0\} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En remarquant qu'en fait, l'équation (1.1) est valable pour tous les ensembles de niveaux de  $u^1, u^2$ , on obtient  $u^1 \leq u^2$  (si  $u_0^1 \leq u_0^2$ ). Autrement dit, on attend un principe de comparaison pour (1.1) qui permet d'appliquer les techniques classiques des solutions de viscosité pour construire des solutions (pour tous temps) de ce genre d'équations (et donc des évolutions généralisées des problèmes géométriques initiaux).

Les cas non-monotones sont ceux pour lesquels (1.13)-(1.14) sont mis en défaut. C'est le cas par exemple pour l'évolution avec une vitesse égale à l'opposée de la courbure moyenne. Mais c'est également le cas, et c'est ce qui nous intéresse ici, pour les problèmes non-locaux introduits ci-dessus. Pour la dynamique des dislocations, une hypothèse physique dit que

$$(1.15) \quad \int_{\mathbb{R}^N} c_0 = 0,$$

et par conséquent, la condition (1.14) ne peut pas être toujours vérifiée. De même, dans le modèle de FitzHugh-Nagumo la fonction  $\alpha$  est seulement lipschitzienne ce qui n'est pas suffisant pour obtenir (1.14).

Dans ce genre de problème non-monotone, les techniques classiques des solutions de viscosité (construction d'une solution par la méthode de Perron comme supremum de sous-solutions) reposant sur le principe de comparaison sont inopérantes. Nous utilisons des théorèmes de points fixes dans des espaces bien choisis. Pour l'unicité, la propriété de contraction est obtenue en étudiant de façon fine des propriétés de régularité de fronts gouvernés par l'équation eikonale, et repose en particulier de manière cruciale sur une borne inférieure de gradient obtenue pendant ma thèse pour cette dernière équation. Elle permet d'établir des estimations  $L^1$  pour les ensembles de niveaux de la solution de (1.9) qui suffisent à démontrer des résultats d'unicité pour des vitesses positives (les ensembles  $\Omega_t$  sont croissants pour l'inclusion par rapport au temps; notons que (1.14) n'est pas nécessairement vérifié). Les résultats d'existence que nous avons démontrés sont plus généraux mais nous avons dû introduire une notion de solution faible.

**1.2. Évolution de fronts apparaissant dans des problèmes d'optimisation de formes.** L'optimisation de forme consiste à trouver des ensembles qui minimisent une fonction objectif donnée. Plus précisément on cherche à résoudre le problème

$$(1.16) \quad \inf_{\Omega \in \mathcal{D}} E(\Omega),$$

où  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble des ensembles bornés de  $\mathbb{R}^N$  (pouvant prendre en compte des contraintes) et  $E : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est donné (on l'appellera souvent énergie). Ce problème est très général et donne lieu à de nombreuses applications, voir les ouvrages de Allaire [All02, All07], Henrot et Pierre [HP05] et les références qu'ils contiennent.

Notre motivation dans ce thème provient des travaux numériques de Allaire, Jouve et Toader [AJT04] qui ont utilisé l'approche suivante. Pour résoudre (1.16), ils démarrent d'un ensemble donné  $\Omega_0$  quelconque et ils déforment le bord  $\Gamma_0$  de  $\Omega_0$  de façon à diminuer l'énergie, au moins formellement. Ils obtiennent ainsi une famille  $(\Omega_t)_{t \geq 0}$  (démarrant de

$\Omega_0$ ) qui est censée évoluer vers un minimum de l'énergie  $E$ , c'est-à-dire une solution de (1.16). Cette méthode a produit de bons résultats numériques. Le but de notre travail était de justifier cette approche, au moins dans deux cas modèles conduisant à des évolutions monotones (au sens du paragraphe précédent).

Décrivons l'approche qui nous intéresse dans le cadre de notre premier cas, celui de la minimisation de la capacité d'un ensemble sous une contrainte de volume :

$$(1.17) \quad \inf_{S \subset\subset \Omega \subset\subset \mathbb{R}^N} \{\text{cap}_S(\Omega) \text{ avec } \text{vol}(\Omega) = \text{constante}\}.$$

L'ensemble  $S$ , appelé la source, est un compact de  $\mathbb{R}^N$  non vide dont le bord est de classe  $C^2$  qui est fixé une fois pour toute. Pour deux ensembles  $A, B$  de  $\mathbb{R}^N$ , la notation  $A \subset\subset B$  signifie que l'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$  est incluse dans l'intérieur  $\text{int } B$  de  $B$ . On cherche donc un infimum parmi les ensembles bornés  $\Omega$  qui contiennent "strictement"  $S$ . Pour exposer le problème simplement, supposons que  $\Omega$  ait un bord de classe  $C^{1,1}$ . Dans ce cas

$$(1.18) \quad \text{cap}_S(\Omega) = \int_{\Omega \setminus S} |\nabla v(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega \setminus S} dx$$

où  $v$  est solution du problème elliptique

$$(1.19) \quad \begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \setminus S, \\ v = 1 & \text{sur } \partial S, \\ v = 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases}$$

On peut calculer les dérivées de formes de la capacité et du volume le long d'une déformation de  $\Omega$  par un champ de vecteur  $\vec{\Theta} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Les formules de Hadamard donnent

$$\text{cap}'_S(\Omega)(\vec{\Theta}) = - \int_{\partial \Omega} |Dv(\sigma)|^2 \langle \vec{\Theta}(\sigma), \vec{n}_\Omega(\sigma) \rangle d\sigma \quad \text{et} \quad \text{vol}'(\Omega)(\vec{\Theta}) = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{\Theta}(\sigma), \vec{n}_\Omega(\sigma) \rangle d\sigma,$$

où  $d\sigma$  est la mesure surfacique de  $\partial \Omega$  et  $\vec{n}_\Omega$  est la normale extérieure à  $\Omega$ . On remarque qu'on retrouve le fait que, lorsqu'on déforme  $\Omega$  suivant la normale sortante (*i.e.*, si l'on "grossit"  $\Omega$ ), la capacité est décroissante et le volume est croissant. Ces formules nous permettent d'exprimer les conditions nécessaires d'optimalité du problème (1.17) : il existe un multiplicateur de Lagrange  $\ell > 0$  tel que

$$\text{cap}'_S(\Omega)(\vec{\Theta}) + \ell \text{vol}'(\Omega)(\vec{\Theta}) = 0.$$

Il est alors naturel d'introduire

$$E_\lambda(\Omega) = \text{vol}(\Omega) + \lambda \text{cap}_S(\Omega)$$

(où  $\lambda = 1/\ell$ ) et de remarquer que le choix de déformation

$$(1.20) \quad \vec{\Theta}(x) = \vec{\mathcal{V}}_\Omega(x) = - (1 - \lambda |Dv(x)|^2) \vec{n}_\Omega(x)$$

est une direction de descente ou un flot de gradient pour  $E_\lambda$  :

$$E'_\lambda(\Omega)(\vec{\mathcal{V}}_\Omega) = - \int_{\partial \Omega} (1 - \lambda |Dv(\sigma)|^2)^2 d\sigma \leq 0.$$

Ainsi, obtient-on, au moins formellement, une stratégie pour résoudre le problème d'optimisation (1.17) : on fixe un ensemble  $S \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^N$  quelconque et on est ramené à



étudier le problème d'évolution  $(\Omega_t)_{t \geq 0}$  avec une vitesse normale  $\vec{\mathcal{V}}_{\Omega_t}$  donnée par (1.20) (où, pour chaque  $t$ ,  $v$  est la solution de (1.19) dans  $\Omega_t \setminus S$ ). La limite

$$(1.21) \quad \Omega_\infty := \lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t),$$

si elle existe, apparaît comme un candidat naturel pour la solution de (1.17). Remarquons de plus que, si  $x \in \partial\Omega_\infty$ , alors  $\vec{\mathcal{V}}_{\Omega_\infty}(x) = 0$  ce qui entraîne que  $\Omega_\infty$  est solution du problème à frontière libre suivant, dit problème de Bernoulli extérieur,

$$(1.22) \quad \text{Trouver } K \subset\subset \mathbb{R}^N \text{ tel que } S \subset\subset K \text{ et } |Dv(x)| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{ pour tout } x \in \partial K,$$

où  $v$  est la solution de (1.19) dans  $K \setminus S$ . Ce dernier problème a une longue histoire en physique et plus particulièrement en électrostatique, voir l'article de référence de Flucher et Rumpf [FR97].

Notre travail a consisté à définir rigoureusement des solutions  $\Omega_t$  du problème d'évolution ; ce problème est non-local à cause du terme  $|Dv|^2$  dans la vitesse qui dépend de tout l'ensemble  $\Omega_t$  à travers (1.19). Ce terme sera appelé terme de Hele-Shaw, en référence au problème d'évolution du même nom lorsque

$$(1.23) \quad \vec{\mathcal{V}}_{\Omega_t}(x) = |Dv(x)|^2 \vec{n}_{\Omega_t}(x).$$

Ce problème d'évolution apparaît lorsqu'on injecte un liquide visqueux au niveau de la source  $S$  entre deux plaques de verres peu écartées et qu'on regarde l'expansion  $\Omega_t$  de ce liquide. D'autre part, en utilisant le principe du maximum pour (1.19), il n'est pas difficile de voir que (1.14) est vérifié et que le problème est donc monotone.

Comme il n'est pas aisé de travailler avec l'approche par lignes de niveaux dans ce genre de problème (le terme d'Hele-Shaw n'a pas de représentation explicite), nous avons préféré utiliser une notion de solutions de viscosité géométriques introduite par Cardaliaguet qui permet de travailler au niveau des ensembles (au lieu des fonctions). Le principe de comparaison pour les sous- et sur-solutions est alors remplacé par le principe d'inclusion (1.13). La preuve de ce dernier est la pierre angulaire de notre travail [10] et plus généralement de ce type de problèmes monotones. L'existence de solutions en découle facilement par des techniques classiques.

Dans le cas où la source  $S$  est étoilée, nous pouvons prouver l'unicité de la solution du problème limite (1.22), ce qui est une question délicate en général. À l'aide de la méthode des semi-limites relaxées (classique en solutions de viscosité et qui permet de passer à la limite avec très peu d'estimations), nous démontrons la convergence (1.21) ce qui termine la première partie du travail.

La seconde partie [11], consiste essentiellement à prouver que l'énergie décroît le long du flot  $\Omega_t$ . Cette propriété justifie dans un sens la terminologie "flot de gradient de  $E_\lambda$ " pour les  $\Omega_t$ . La difficulté pour établir la décroissance de  $t \mapsto E_\lambda(\Omega_t)$  vient du fait que les solutions de viscosité, si elles sont très bien adaptées au problème d'évolution non-linéaire et non-local (1.20), ont peu de choses à voir avec une notion variationnelle comme la capacité. Ces solutions ont peu de régularité et donc la capacité ne peut plus être définie

par (1.18)-(1.19). La définition est remplacée par

$$(1.24) \quad \text{cap}_S(\Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega \setminus S} |\nabla v|^2 : v \in H_0^1(\Omega), v = 1 \text{ sur } S \right\},$$

si  $\Omega$  est seulement ouvert et même par une définition un peu plus compliquée (que nous ne donnerons pas ici) dans le cas d'un ensemble borné général comme ceux avec lesquels nous travaillons. Ceci explique pourquoi le calcul de l'énergie et, à plus forte raison, la preuve de sa décroissance, est difficile.

Il a donc été nécessaire d'étudier le lien entre nos solutions et les solutions variationnelles du problème (1.17) reformulé comme

$$(1.25) \quad \inf_{S \subset \subset \Omega \subset \subset \mathbb{R}^N} \{ \text{vol}(\Omega) + \lambda \text{cap}_S(\Omega) \}.$$

Pour cela, nous avons utilisé la notion de mouvements minimisants, introduite par Almgren, Taylor et Wang [ATW93], qui consiste à approcher les solutions généralisées de (1.20) par une suite de problèmes variationnels pour lesquels la décroissance de l'énergie est facile à obtenir.

Mentionnons, pour terminer, que [10] a été écrit dans un cadre plus général qui, outre (1.17), comprend aussi le problème

$$(1.26) \quad \inf_{S \subset \subset \Omega \subset \subset \mathbb{R}^N} \{ \text{cap}_S(\Omega) \text{ avec } \text{per}(\Omega) = \text{constante} \},$$

qui, comme ci-dessus peut-être reformulé comme

$$(1.27) \quad \inf_{S \subset \subset \Omega \subset \subset \mathbb{R}^N} \{ \text{per}(\Omega) + \lambda \text{cap}_S(\Omega) \}.$$

La dérivée de forme du périmètre fait intervenir la courbure moyenne ; le problème d'évolution correspondant est alors

$$(1.28) \quad \vec{\mathcal{V}}_{\Omega_t}(x) = (H_{\Omega_t}(x) + \lambda |Dv(x)|^2) \vec{n}_{\Omega_t}(x),$$

où  $H_{\Omega_t}(x) = \text{Trace}(D \vec{n}_{\Omega_t}(x))$  est la courbure moyenne de  $\partial\Omega_t$  en  $x$  (négative pour les ensembles convexes). Le problème limite est un problème de Bernoulli extérieur généralisé avec des termes de courbure. Ce cas rend l'étude bien plus délicate. En particulier, nous avons dû développer une version géométrique non-locale du Lemme matriciel d'Ishii [CIL92, Theorem 8.3] qui a été énoncé sous une forme générale pour servir à d'autres applications.

**1.3. Équation de Hamilton-Jacobi, contrôle stochastique et homogénéisation de systèmes.** Les travaux [9, 19, 15] traitent de questions plus classiques en EDP : nous montrons des résultats d'unicité, d'existence et d'homogénéisation pour des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Dans les deux premiers travaux, nous considérons une équation du type

$$(1.29) \quad \begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t} + G(x, t, Du, D^2u) + H(x, t, u, Du, D^2u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où  $T > 0$  est une constante et  $\psi$  est une condition terminale fixée. Je préfère énoncer le problème d'évolution avec condition terminale (à la place d'une condition initiale) car les problèmes reliés à cette équation s'écrivent plus simplement (voir ci-dessous).

Nous allons décrire deux équations types; la première est reliée à des problèmes de contrôle stochastique et la seconde provient de la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR dans la suite). Ce deux domaines tiennent une place importante en mathématiques financières, mécanique, théorie du contrôle risque-sensitif, jeux différentiels, etc. (voir les références dans le § 3.3).

Avant de présenter chaque type d'EDP, expliquons leurs spécificités communes. Les EDP (1.29) considérées sont fortement non-linéaires, éventuellement dégénérées. La notion de solution bien adaptée à ce type d'équations est la notion de solutions de viscosité. Le contexte "classique" de cette théorie (*cf.* [CIL92, FS93]) est celui des solutions uniformément continues. Ici, nous sortons de ce cadre en prenant des données terminales non-bornées (et non uniformément continues) et en cherchant des solutions également non-bornées (ni inférieurement ni supérieurement) à l'équation posée dans l'espace  $\mathbb{R}^N$  tout entier. Pour espérer obtenir des résultats de comparaison, nous remplaçons alors les données au bord, qui apparaissent lorsqu'on travaille dans un ouvert borné, par des conditions à l'infini. Ici, pour simplifier l'exposé, nous nous placerons dans un cadre quadratique en travaillant avec des fonctions  $\psi, u$  à croissance au plus quadratique (ou sous-quadratiques, dans un sens qui sera précisé, voir (3.1) et (3.2)). La seconde spécificité, qui induit une difficulté pour l'étude de ces équations, est qu'elles comportent une non-linéarité sur-linéaire par rapport au gradient (je me restreindrai ici aussi au cas quadratique). Dans le contexte des problèmes de contrôle stochastique, cela correspond, comme nous allons le voir, à des problèmes avec contrôles non-bornés.

Commençons par exposer le premier cas modèle où  $G$  est un hamiltonien concave qui a la forme

$$(1.30) \quad G(x, t, p, X) = \inf_{\beta \in B} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Trace} [c(x, t, \beta) c^T(x, t, \beta) X] - \langle g(x, t, \beta), p \rangle - f(x, t, \beta) \right\}$$

et  $H$  est un hamiltonien convexe

$$(1.31) \quad H(x, t, p, X) = \sup_{\alpha \in A} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Trace} [\sigma(x, t, \alpha) \sigma^T(x, t, \alpha) X] - \langle b(x, t, \alpha), p \rangle - \ell(x, t, \alpha) \right\}$$

(qui ne dépend pas de  $u$ ). Nous permettons que l'un des ensembles  $A$  ou  $B$  soit non-borné ce qui peut induire une non-linéarité sur-linéaire par rapport à  $Du$  comme annoncé ci-dessus (voir (1.36) par exemple).

Les EDP (1.29) avec (1.30)-(1.31) correspondent, au moins formellement, à des problèmes de contrôle stochastiques. Expliquons-le à travers l'exemple fondamental du problème linéaire quadratique stochastique, qui est le problème modèle de [9]. Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien (multi-dimensionnel) défini sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  muni d'une filtration adaptée  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Considérons l'équation différentielle stochastique linéaire

$$(1.32) \quad \begin{cases} dX_s = [b_1(s)X_s + b_2(s)\alpha_s]ds + [\sigma_1(s)X_s + \sigma_2(s)\alpha_s]dW_s, & \text{for } t \leq s \leq T, \\ X_t = x, \end{cases}$$

où  $b_1(t), b_2(t), \sigma_1(t), \sigma_2(t)$  sont des matrices données de tailles adéquates,  $\alpha_s$  est un contrôle ( $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable) à valeurs dans  $\mathbb{R}^M$  et  $X_s$  est la solution (adaptée) de (1.32) associée au contrôle  $\alpha_s$ . Le but du problème linéaire quadratique est de minimiser le coût quadratique

$$(1.33) \quad \inf_{\alpha_s} \mathbb{E} \left\{ \int_t^T [\langle X_s, \ell_1(s) X_s \rangle + \ell_2 |\alpha_s|^2] ds + \langle X_T, \psi_1 X_T \rangle \right\} := V(x, t),$$

appelé fonction valeur du problème;  $\ell_1(t)$  et  $\psi_1$  sont des matrices carrées de la taille qu'il faut et  $\ell_2 > 0$  est une constante. L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman associée (au moins formellement) à ce problème est (1.29) si on pose

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R}^M \text{ (non borné)}, & \psi(x) &= \langle x, \psi_1 x \rangle, & G &= 0, \\ b(x, t, \alpha) &= b_1(t)x + b_2(t)\alpha, & \sigma(x, t, \alpha) &= \sigma_1(t)x + \sigma_2(t)\alpha, & \ell(x, t, \alpha) &= \langle x, \ell_1(t)x \rangle + \ell_2 |\alpha|^2. \end{aligned}$$

Si, de plus,

$$(1.34) \quad \sigma_2(t) = 0,$$

alors, un calcul précis des termes de (1.29) donne

$$(1.35) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \text{Trace} [(\sigma_1(t)x)(\sigma_1(t)x)^T D^2 u] - \langle b_1(t)x, Du \rangle - \langle x, \ell_1(t)x \rangle + \frac{1}{4\ell_2} |b_2(t)^T Du|^2 = 0,$$

où apparaît un terme quadratique (convexe) par rapport au gradient car

$$(1.36) \quad \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \left\{ -\langle b_2(t)\alpha, Du \rangle - \ell_2 |\alpha|^2 \right\} = \frac{1}{4\ell_2} |b_2(t)^T Du|^2.$$

Le cas (1.34), ou plus généralement lorsque la matrice de diffusion  $\sigma$  dans  $H$  est bornée par rapport au contrôle, est le cas que nous arrivons à traiter dans [9] : nous prouvons la comparaison entre les sous- et sur-solutions de (1.35) à croissance au plus quadratique. La méthode de Perron nous donne alors l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité continue pour des temps petits. De plus, nous prouvons rigoureusement que la fonction valeur  $V$  donnée par (1.33) est l'unique solution de viscosité de (1.35), ce qui n'est pas évident pour des problèmes de contrôle non bornés.

Si maintenant,  $\sigma_2 \neq 0$  dans le problème linéaire quadratique précédent, alors la définition de l'hamiltonien  $H$  devient elle-même problématique; pour fixer les idées, supposons que  $b_1 = 0, \sigma_1 = 0, \ell_1 = 0, b_2, \sigma_2$  sont des matrices identités et  $\ell_2 = 1$ . Alors

$$H(x, t, Du, D^2 u) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \left\{ -\langle \alpha, Du \rangle - |\alpha|^2 - \frac{|\alpha|^2}{2} \Delta u \right\}$$

est égal à  $+\infty$  dès que  $\Delta u \leq -2$ . Le lien entre le problème de contrôle stochastique est l'équation d'Hamilton-Jacobi dans ce cas n'est pas clair. En général, la méthode de résolution utilise la théorie du contrôle et nécessite des connaissances *a priori* sur la forme de la fonction valeur (c'est une fonction quadratique en espace avec la bonne concavité par exemple), ce que nous ne voulons pas utiliser. Nous renvoyons le lecteur au livre de Yong et Zhou [YZ99] pour des détails. À notre connaissance, le seul travail qui n'impose pas d'hypothèses sur la fonction valeur est celui de Krylov [Kry01]; pour cela, il suppose

que toutes les données sont des polynômes quadratiques ce qui lui permet de prouver, par un calcul “algébrique”, que la fonction valeur est elle-même quadratique. En particulier il peut traiter le problème linéaire quadratique (1.32)-(1.33) mais son approche repose sur la forme particulière des données et ne peut être étendue à un cadre plus général. Dans [19], nous arrivons à traiter des cas plus généraux mais pour des solutions strictement sous-quadratiques en espace.

Le deuxième type d’EDP que nous traitons dans [19] est le cas où

$$(1.37) \quad G(x, t, p, X) = -\frac{1}{2} \text{Trace} [\sigma(x, t) \sigma^T(x, t) X] - \langle b(x, t), p \rangle$$

est linéaire et

$$(1.38) \quad H(x, t, u, p, X) = f(x, t, u, \sigma(x, t)p)$$

est un hamiltonien du premier ordre convexe en  $p$ . Cette EDP est reliée aux EDSR introduites par Pardoux et Peng [PP90] qui ont montré l’existence et l’unicité de solutions pour des EDSR à coefficients lipschitziens (ce qui revient à dire que  $f$  ci-dessus est lipschitzien dans ses deux dernières variables). De plus ils ont établi le lien entre la solution de l’EDSR et l’EDP (1.29) avec (1.37)-(1.38), établissant une grille de lecture commode entre les solutions des EDSR et celles des EDP.

Ce travail a ensuite été généralisé au cas où  $f$  est quadratique par rapport à sa dernière variable par Kobylanski [Kob00] mais pour des solutions bornées. Récemment Briand et Hu [BH08] ont prouvé l’existence et l’unicité des solutions quadratiques pour les EDSR. Notre but est de prouver l’unicité pour la partie EDP sous les hypothèses qui correspondent à celles de [BH08] et, plus généralement, d’essayer de généraliser la partie EDP de [Kob00] dans le cas des solutions non-bornées.

Le dernier travail qui correspond à ce thème concerne l’homogénéisation de systèmes d’équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre

$$(1.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + H_i(x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, Du_i^\varepsilon) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T], \\ u_i^\varepsilon(x, 0) = u_{0,i}(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq M,$$

où les hamiltoniens  $H_i(x, y, r, p)$  sont périodiques par rapport à  $y$ , coercifs par rapport à  $p$  et satisfont des propriétés d’uniforme continuité. Les données initiales  $u_{0,i}$  sont bornées uniformément continues (BUC dans la suite). Le cadre général est donc (pratiquement) le cadre de de Lions, Papanicolau et Varadhan [LPV86]. L’originalité provient du couplage entre les équations (qui intervient au niveau de la variable  $r \in \mathbb{R}^M$ ). Nous supposons que le système satisfait une hypothèse de monotonie, voir (3.8), qui permet d’obtenir un résultat de comparaison, et par suite, d’obtenir l’existence et l’unicité d’une solution  $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \dots, u_M^\varepsilon)$ .

Nous prouvons que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u^\varepsilon$  converge vers une solution de viscosité BUC  $u = (u_1, \dots, u_M)$  du système homogénéisé

$$(1.40) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{H}_i(x, u, Du_i) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T], \\ u_i(x, 0) = u_{0,i}(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq M.$$

Les hamiltoniens effectifs  $H_i$  sont caractérisés par des problèmes cellulaires classiques. Nous montrons qu'ils héritent de propriétés similaires à celles des  $H_i$  (en particulier le système limite est encore monotone) ce qui permet d'avoir de l'unicité pour (1.40) et de prouver la convergence en adaptant la méthode de la fonction-test perturbée de Evans [Eva89]. Notons que, contrairement aux papiers précédents qui traitent de l'homogénéisation des systèmes (Evans [Eva89] et Shimano [Shi06]), nous ne pénalisons pas le couplage ce qui implique que le problème homogénéisé est encore un système.

**1.4. Inégalité de Łojasiewicz pour des fonctions convexes et liens avec le flot de gradient.** L'inégalité de Łojasiewicz [Łoj63] provient de la géométrie algébrique réelle et peut être formulée de la façon suivante : si  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction analytique réelle et  $\bar{x} \in f^{-1}(0)$  est un point critique de  $f$ , alors il existe des constantes  $\rho \in [1/2, 1)$  et  $C > 0$  telles que

$$(1.41) \quad \|\nabla f(x)\| \geq C|f(x)|^\rho \quad \text{pour } x \text{ dans un voisinage } U \text{ de } \bar{x}.$$

Cette inégalité, qui repose sur des propriétés profondes des fonctions analytiques, a été énormément étudiée et généralisée. La raison en est l'énorme potentiel d'applications en optimisation (convergence d'algorithmes) ou pour l'étude asymptotique d'équations différentielles ou d'EDP.

Łojasiewicz ([Łoj84]) l'a initialement utilisée pour prouver la convergence vers l'équilibre des trajectoires de gradient bornées

$$(1.42) \quad \dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)), \quad t \geq 0,$$

pour une fonction analytique  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Au même moment, Simon [Sim83] l'a généralisée au cadre de fonctionnelles analytiques  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  où  $H$  est un espace de Hilbert de dimension infinie, ouvrant la voie à son utilisation dans la théorie asymptotique des EDP.

Même si ce n'est pas le sujet de notre étude, illustrons l'importance de l'inégalité de Łojasiewicz dans les applications en décrivant brièvement le cadre du travail de Simon (suivi par de nombreux autres travaux, voir § 4.3). Soient  $V, H$  des espaces de Hilbert tels que  $V \subset H = H' \subset V'$  et considérons une solution  $u \in C^1([0, +\infty))$  de l'équation d'évolution

$$(1.43) \quad \frac{du}{dt} + E'(u(t)) = 0, \quad u(0) = u_0,$$

où  $E : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonctionnelle analytique. Alors, si  $\bar{u} \in V$  est un point critique de  $E$  (c'est-à-dire que  $\bar{u}$  satisfait l'équation stationnaire  $E'(\bar{u}) = 0$ ) et que l'inégalité de Łojasiewicz est vérifiée dans un voisinage de  $\bar{u}$  contenant  $u_0$ , on obtient  $\|u(t) - \bar{u}\|_H \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (et la vitesse de convergence est exponentielle). Dans les références du § 4.3, on trouve des applications à l'équation de la chaleur semi-linéaire, l'équation des ondes, de Cahn-Hilliard, etc.

Revenons à l'inégalité de Łojasiewicz, ou plus précisément à l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz (4.1), qui est une généralisation proposée par Kurdyka. Il a remarqué que, sous cette nouvelle forme, (1.41) était vérifiée par une classe de fonctions plus large que les fonctions analytiques (les fonctions  $C^1$  dont le graphe appartient à une structure  $\alpha$ -minimale). Bolte, Daniilidis et Lewis [BDL06a] ont remarqué que cette nouvelle inégalité

était bien adaptée au contexte des fonctions non-lisses qui ont une grande importance en optimisation (par exemple, (1.42) s'écrit très bien à l'aide d'inclusions différentielles pour définir les trajectoires de gradient de certaines fonctions non-lisses).

Le but de [18] est de mieux comprendre l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz dans le cadre hilbertien non-lisse pour pouvoir englober le maximum d'applications dans le futur. Nous établissons plusieurs caractérisations de cette inégalité à l'aide de propriétés des trajectoires de gradients de la fonction et de sa régularité métrique. Ces résultats sont précisés dans la cas des fonctions convexes. Nous obtenons une condition suffisante pour qu'une fonction convexe satisfasse l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz (elle ne doit pas être "trop plate" au voisinage de son minimum) et construisons un contre-exemple de fonction convexe ne satisfaisant pas cette inégalité.

Au cours de ce travail, la longueur des trajectoires de gradient a occupé une place importante. Łojasiewicz avait déjà prouvé que la longueur des trajectoires de gradient d'une fonction satisfaisant (1.41) était finie. La réciproque est fausse, on a besoin que toutes les trajectoires de gradient par morceaux de la fonction soient de longueur finie pour que (1.41) soit vraie (voir Théorème 4.1). Néanmoins, dans le cas convexe qui nous a occupé, nous nous sommes posés la question suivante : les trajectoires de gradient d'une fonction convexe sont-elles toujours de longueur finie ?

Il existe peu de travaux sur le sujet à part un résultat de Brézis [Bré71] dans le cadre hilbertien qui répond par l'affirmative si l'ensemble des minima de la fonction convexe est d'intérieur non vide. Nous pouvons, d'autre part, déduire d'un contre-exemple de Baillon [Bai78] que ce n'est pas toujours vrai en dimension infinie. Mais le cas, apparemment simple, d'une fonction convexe  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  avec un unique minimum était non résolu. Le résultat le plus marquant de [20] est de prouver que les trajectoires de gradient sont de longueur finie pour une fonction quasiconvexe (donc en particulier pour une fonction convexe). La preuve est malheureusement particulière à la dimension 2. Nous cherchons toujours à répondre à cette question en dimension strictement supérieure à 2.

## 2. PROPAGATION DE FRONTS AVEC VITESSE NORMALE PRESCRITE

Le type de problème qui nous interesse est le suivant. Soit  $\Omega_0$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^N$  et désignons par  $\Gamma_0$  l'hypersurface  $\partial\Omega_0$ . On appelle  $\Omega_0$  "l'intérieur" de  $\Gamma_0$  ce qui permet de définir une normale orientée sortante  $\vec{n}_{\Omega_0}(x)$  en tout point  $x \in \Gamma_0$  (qui pointe hors de  $\Omega_0$ ) ; l'ouvert  $\tilde{\Omega}_0 := (\Omega_0 \cup \Gamma_0)^C$  sera appelé l'extérieur de  $\Gamma_0$ . La seconde forme fondamentale de  $\Gamma_0$  en  $x$  sera notée  $D\vec{n}_{\Omega_0}(x)$  (elle ne dépend pas de l'orientation choisie).

Démarrant de cette partition de  $\mathbb{R}^N$ , on cherche à étudier l'évolution  $(\Omega_t, \tilde{\Omega}_t, \Gamma_t)_{t \geq 0}$  avec un vitesse normale prescrite

$$(2.1) \quad \vec{\mathcal{V}}_{\Omega_t}(x) = \mathcal{V}_{\Omega_t}(x) \vec{n}_{\Omega_t}(x) = h(x, t, \vec{n}_{\Omega_t}(x), D\vec{n}_{\Omega_t}(x), \bar{\Omega}_t) \vec{n}_{\Omega_t}(x),$$

où  $h$  est une loi d'évolution scalaire donnée.

Pour des introductions aux problèmes de propagation de front et une liste de la grande variété de problèmes auxquels ils s'appliquent, voir les livres [BCE<sup>+</sup>97] et Giga [Gig06] ainsi que Barles, Soner et Souganidis [BSS93] et Souganidis [Sou95].

En général, sauf pour des données très régulières et des temps petits, il y a peu d'espoir de trouver des solutions régulières. Même dans les cas les plus simples (par exemple  $h \equiv 1$ ), ces évolutions développent des singularités en temps fini, la topologie du front peut changer (apparition ou disparition de composantes connexes, extinction, etc.) D'autre part, les évolutions considérées sont fortement non-linéaires et parfois non-locales. Enfin, dans de nombreux cas, nous aurons besoin de relaxer la régularité sur les données initiales et/ou la loi d'évolution et de pouvoir quand même donner un sens à l'évolution. Ces difficultés rendent délicates l'étude de (2.1) à l'aide des outils de la géométrie classique (pour la courbure moyenne, il existe néanmoins les travaux de Huisken [Hui84], Gage et Hamilton [GH86]).

Il est donc nécessaire d'introduire des notions de solutions faibles. Celles que nous allons décrire et utiliser sont les suivantes. En premier lieu, la plus célèbre est sans doute l'approche par lignes de niveau qui est une approche analytique développée par Evans et Spruck [ES91] et Chen, Giga et Goto [CGG91]. Elle remplace le problème géométrique par une EDP, l'équation géométrique associée au mouvement, qui est résolue à l'aide des solutions de viscosité. Lorsqu'il est malaisé, ou impossible, d'écrire cette EDP, nous utiliserons les "solutions de viscosité géométriques" introduites par Cardaliaguet [Car00, Car01]; cette notion est plus géométrique et permet un va-et-vient fructueux entre la géométrie et l'analyse. Nous serons aussi amenés à parler de mouvements minimisants (voir Almgren, Taylor et Wang [ATW93], Ambrosio [Amb95]) pour faire le lien entre des solutions variationnelles et les solutions de viscosité géométriques. Dans [13] nous avons introduit une autre notion de solutions faibles; elle est inspirée par l'approche par lignes de niveaux et nous l'utilisons dans des cas d'évolutions non-monotones.

Enfin, il existe d'autres notions de solutions dont nous ne parlerons pas ici : les solutions de Brakke [Bra78] définies à l'aide de courants, les solutions barrières (De Giorgi [DG90], Ilmanen [Ilm93b], Bellettini et Novaga [BN00]), des limites singulières d'équations de réaction-diffusion (De Mottoni et Schatzman [DMS95], Bronsard et Kohn [BK91]), des solutions de viscosité géométriques se rapprochant un peu de celle que nous utilisons (Barles et Souganidis [BS98]), etc. Pour des liens entre ces différentes notions de solutions, voir Evans, Soner et Souganidis [ESS92], Ilmanen [Ilm93a, Ilm94] et Evans et Spruck [ES95] et [BN00].

**2.1. L'approche par lignes de niveaux.** Supposons pour le moment qu'on puisse définir une évolution classique pour (2.1) (les ensembles en jeu sont au moins  $C^2$ , évoluent de façon  $C^1$  et satisfont (2.1)). L'approche par lignes de niveaux consiste à introduire une fonction auxiliaire  $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(2.2) \quad u(\cdot, t) = 0 \text{ sur } \Gamma_t, \quad u(\cdot, t) > 0 \text{ dans } \Omega_t \quad \text{et} \quad u(\cdot, t) < 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_t.$$

Supposons de plus que  $u$  est elle-même régulière dans un voisinage de  $\cup_{t \geq 0} \Gamma_t \times \{t\}$ . Comme elle est constante sur  $\Gamma_t$  et positive dans  $\Omega_t$  ("l'intérieur"), on obtient la relation

$$(2.3) \quad \vec{n}_{\Omega_t}(x) = -\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|} \quad \text{pour tous } t \geq 0, x \in \Gamma_t.$$



Comme l'évolution est  $C^1$ , un simple calcul donne également

$$(2.4) \quad \vec{\mathcal{V}}_{\Omega_t}(x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)}{|Du(x, t)|} \vec{n}_{\Omega_t}(x) \quad \text{pour tous } t \geq 0, x \in \Gamma_t.$$

En injectant (2.3) et (2.4) dans l'équation d'évolution (2.1), on obtient alors l'EDP en  $u$ , appelée équation géométrique de mouvement,

$$(2.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = h \left( x, t, -\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|}, -D \left( \frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|} \right), \{u(\cdot, t) \geq 0\} \right) |Du(x, t)|$$

posée pour tous  $t \geq 0$  et  $x \in \Gamma_t$ . Si l'on arrive à trouver une solution suffisamment régulière de cette équation, on retrouve l'évolution  $(\Omega_t, \tilde{\Omega}_t, \Gamma_t)_{t \geq 0}$  en regardant les lignes de niveaux de  $u(\cdot, t)$ . En général, c'est sans espoir car, d'une part, les évolutions considérées développent des singularités en temps fini et, d'autre part, l'équation (2.5) est fortement non-linéaire, singulière et non-locale.

Cependant, cette idée est le point de départ de l'approche par lignes de niveaux, introduite pour des calculs numériques par Osher et Sethian [OS88] (il existe des articles plus anciens utilisant déjà cette idée, Evans et Souganidis [ES84] et Barles [Bar85]) puis développée de façon rigoureuse par Evans et Spruck [ES91] et Chen, Giga et Goto [CGG91]. La littérature sur le sujet est maintenant abondante (voir le livre de Giga [Gig06] pour une liste de références).

Dans [ES91] et [CGG91], les auteurs posent *a priori* (2.5) dans tout l'espace  $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ ,

$$(2.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = h \left( x, t, -\frac{Du}{|Du|}, -\left( I + \frac{Du}{|Du|} \otimes \frac{Du}{|Du|} \right) D^2 u, \{u(\cdot, t) \geq 0\} \right) |Du(x, t)|$$

avec une condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  ( $u_0$  est arbitraire et vérifie (2.2) pour  $t = 0$ ) et prouvent (pour certains  $h$ , en particuliers locaux) les choses suivantes.

**Théorème 2.1.** *Sous une certaine hypothèse de structure (**structure-h**) sur  $h$ , pour toute donnée initiale  $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ , on a un résultat de comparaison pour (2.6) : si  $u^1$  (respectivement  $u^2$ ) est une sous-solution (respectivement sur-solution) de viscosité de (2.6) telle que  $u^1(\cdot, 0) \leq u_0 \leq u^2(\cdot, 0)$ , alors  $u^1 \leq u^2$  dans  $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$ . En conséquence, il existe une unique solution de viscosité  $u \in BUC(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  de (2.6).*

**Théorème 2.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, les ensembles*

$$(2.7) \quad \Gamma_t := \{u(\cdot, t) = 0\}, \quad \Omega_t := \{u(\cdot, t) > 0\}, \quad \tilde{\Omega}_t := \{u(\cdot, t) < 0\}$$

*ne dépendent que de  $h$  et de*

$$(2.8) \quad \Gamma_0 = \{u_0 = 0\}, \quad \Omega_0 := \{u_0 > 0\}, \quad \tilde{\Omega}_0 := \{u_0 < 0\}.$$

*Les relations (2.7) permettent donc de définir l'évolution généralisée  $(\Omega_t, \tilde{\Omega}_t, \Gamma_t)_{t \geq 0}$  de  $(\Omega_0, \tilde{\Omega}_0, \Gamma_0)$  avec vitesse normale  $\mathcal{V} = h$ .*

Faisons quelques commentaires sur ces théorèmes. Ils nous ne donnons volontairement pas l'hypothèse (**structure-h**) qui peut prendre diverses formes (très techniques) suivant la loi d'évolution  $h$  en jeu. Citons quelques exemples. Dans le cas de (1.2), il suffit que  $c$  soit continu et lipschitzien en espace. Dans [ES91],  $h = -\operatorname{div} \vec{n}_{\Omega_t}$  est la courbure moyenne et (2.6) s'écrit alors comme (1.3); [CGG91] traite le cas de mouvements plus généraux

(courbure anisotropique avec termes du premier ordre) ; [IS95] permet la prise en compte de mouvements par courbure gaussienne ; dans [4], nous donnons des hypothèses sur  $h$  pour être capable de traiter des évolutions de graphes de solutions d'équations quasilinéaires paraboliques (voir § 2.2 et aussi [12] où l'hypothèse **(structure- $h$ )** est discutée). Pour des cas non-locaux monotones, nous renvoyons à [Sle03, Kim03, DLKS04, Sro].

Néanmoins, précisons qu'une hypothèse fondamentale sur  $h$  est la suivante. Si  $X, Y \in \mathcal{S}_N$  sont des matrices symétriques (munies de l'ordre usuel) et  $A, B \subset \mathbb{R}^N$  sont de ensembles, on doit avoir, pour tous  $t \in [0, +\infty)$ ,  $x, p \in \mathbb{R}^N$  avec  $|p| = 1$ ,

$$X \leq Y \text{ et } A \subset B \implies h(x, t, p, X_{|p^\perp}, A) \leq h(x, t, p, Y_{|p^\perp}, B),$$

où " $_{|p^\perp}$ " désigne la restriction à l'hyperplan orthogonal à  $p$ . La monotonie par rapport à la matrice de courbure permet d'obtenir une équation (2.6) parabolique (ce qui est le minimum pour espérer obtenir le principe de comparaison du Théorème 2.1) et la monotonie par rapport au terme ensembliste correspond aux cas de mouvements monotones décrits dans l'introduction (voir 1.13).

Pour résoudre (2.6), on utilise les solutions de viscosité qui sont bien adaptées à ce type d'EDP fortement non-linéaires et singulières. Concernant le Théorème 2.2, on remarque qu'on peut prendre un triplet  $(\Omega_0, \tilde{\Omega}_0, \Gamma_0)$  avec très peu de régularité. Il suffit en fait de choisir deux ouverts  $\Omega_0, \tilde{\Omega}_0$  et un fermé  $\Gamma_0$  tels que  $\Omega_0 \cup \Gamma_0 \cup \tilde{\Omega}_0 = \mathbb{R}^N$ . Il est en effet toujours possible de trouver une fonction  $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ , et même lipschitzienne, satisfaisant (2.8) (il suffit de prendre une troncature de la distance signée à  $\Gamma_0$ ). On a ainsi une évolution généralisée pour tout temps d'ensembles non-réguliers qui coïncide avec l'évolution classique quand tout est lisse.

Cette notion prend donc en compte l'apparition de singularités et les changements topologiques du front (voir Figure 1 pour l'évolution d'une "haltère" par courbure moyenne dans  $\mathbb{R}^3$ ). Le désavantage d'une telle approche réside principalement dans le fait que  $\Gamma_0$

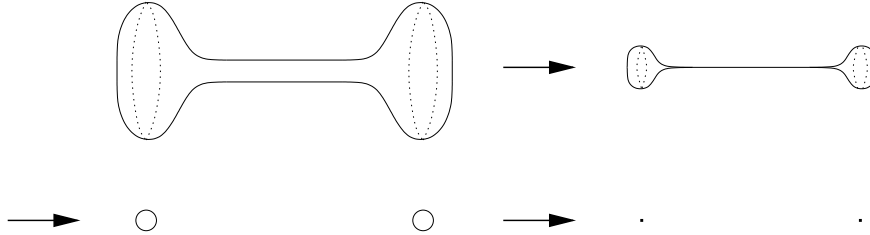


FIG. 1

est seulement une ligne de niveau d'une fonction uniformément continue et, de ce fait, n'a aucune régularité. En particulier, il peut arriver que le front s'épaississe. Les exemples les plus connus sont ceux de l'évolution par courbure moyenne du "huit" (voir Evans et Spruck [ES91] et Figure 2) et de deux courbes gaussiennes asymptotes à l'infini (Ilmanen [Ilm92] et Figure 3). Ces phénomènes sont à mettre sur le compte de problèmes de non-unicité ou d'instabilité du mouvement.

La preuve du Théorème 2.2 repose sur le caractère géométrique de l'équation (voir Barles, Soner et Souganidis [BSS93] pour une discussion) qui peut être expliqué par le

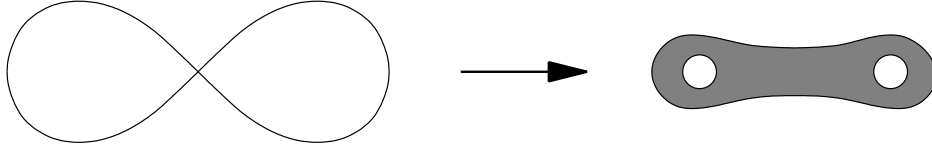


FIG. 2

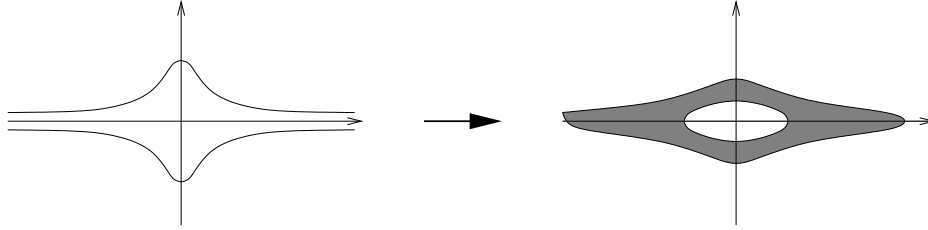


FIG. 3

fait que l'équation est invariante par tout changement de variable du type  $u \rightarrow \varphi(u)$  ou  $\varphi$  est strictement croissante et vérifie  $\varphi(0) = 0$ .

À la suite de la remarque précédente, signalons pour finir que, pour être complètement rigoureux, la bonne équation à considérer dans le cas non-local est (2.6) en remplaçant le terme non-local  $\{u(\cdot, t) \geq 0\}$  par  $\{u(\cdot, t) \geq u(x, t)\}$  (*cf.* Slepcev [Sle03]). C'est cette équation qui a les bonnes propriétés de stabilité. Nous renvoyons à [Sle03, DLKS04, Sro] et [13] (cas  $c_0 \geq 0$ ) pour les détails.

## 2.2. Résultats d'unicité pour l'équation de courbure moyenne des graphes.

Dans cette partie, je vais rappeler brièvement certains des résultats de [3, 4, 5, 6] obtenus dans ma thèse en collaboration avec Guy Barles, Samuel Biton et Marianne Bourgoing. Ils permettent d'introduire et de motiver les résultats des deux articles [7, 12] qui suivent sur le même sujet et qui ont été écrits avec Samuel Biton, Pierre Cardaliaguet et Emmanuel Chasseigne.

**2.2.1. Position du problème et travaux effectués dans la thèse.** Le point de départ de ces travaux est le théorème suivant.

**Théorème 2.3.** (*Ecker et Huisken [EH89, EH91]*) *Pour toute donnée initiale  $v_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  localement lipschitzienne, l'équation de courbure moyenne des graphes (1.4) admet au moins une solution  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$ .*

Cet théorème est surprenant car une fonction localement lipschitzienne dans  $\mathbb{R}^N$  peut avoir une croissance arbitraire. Quand on pense à l'équation de la chaleur par exemple, il est bien connu ([Joh91] par exemple) que pour avoir existence et unicité, on doit choisir des données initiales satisfaisant des conditions de croissances. La question, posée par

Angenent [Ang94], à laquelle nous avons essayé de répondre, est celle de l'unicité de la solution de Ecker et Huisken ; plus généralement, quelles sont les conditions de structure sur l'EDP qui permettent d'obtenir de tels résultats ?

Ces questions sont d'ordre théorique et ont pour but d'avancer dans la compréhension des EDP quasilineaires paraboliques dégénérées du type

$$(2.9) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \text{Trace} \left( b(Dv) D^2 v \right) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty),$$

où  $b$  est continu de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathcal{S}_N^+$ , l'ensemble des matrices symétriques positives (remarquer que l'équation n'est pas nécessairement uniformément parabolique). Il existe peu de travaux sur le sujet. La théorie "classique" des solutions de viscosité (*cf.* [CIL92, GGIS91]) couvre le cas des solutions uniformément continues (et donc à croissance au plus linéaire). En ce qui concerne l'existence, à ma connaissance, le seul travail généralisant [EH89, EH91] est celui de Chou et Kwong [CK01] ; les auteurs donnent de nombreuses conditions de structure pour que (2.9) admette au moins une solution régulière sans condition de croissance.

À partir de maintenant, pour la clarté de l'exposé, je me restreins au cas particulier de notre équation modèle (1.4).

Concernant l'unicité, pratiquement rien n'était connu. On peut aborder le problème de manière analytique. C'est ce que nous avons fait dans [5] où nous avons démontré l'unicité en dimension 1 (évolution des graphes par courbure moyenne dans le plan) sans aucune restriction de croissance (signalons quand même que [CK01] contient également l'unicité pour (1.4) en dimension 1 ; les méthodes utilisées et la classe d'équations à laquelle elles s'appliquent sont différentes des nôtres).

En dimension  $N$ , nous avons obtenu des résultats en imposant des restrictions de croissance de type polynomial sur les solutions (voir [6]). L'approche analytique utilisée repose sur des techniques sophistiquées de preuves du principe de comparaison pour les solutions de viscosité.

C'est dans [4], que nous avons introduit l'approche à mon sens la plus prometteuse, qui utilise de manière fondamentale le caractère géométrique de l'EDP. Elle consiste à "voir" le graphe d'une solution de (1.4) comme l'évolution généralisée par courbure moyenne (donnée par l'approche par lignes de niveau décrite dans le § 2.1) d'une hypersurface de  $\mathbb{R}^{N+1}$  gouvernée par (1.3) (posée dans  $\mathbb{R}^{N+1} \times (0, +\infty)$ ). Outre des bornes  $L^\infty$  locales pour les solutions, ceci nous a permis de reformuler le problème d'unicité comme un problème de non-épaississement des évolutions généralisées de graphes par courbure moyenne. Citons une version particulière de ce résultat qui nous sera utile pour la suite.

**Théorème 2.4.** [4, Sections 8-9] (*Structure du front et reformulation du problème d'unicité*). Soit  $v_0 \in C(\mathbb{R}^N)$  et  $\Gamma_t$  l'évolution généralisée (au sens du Théorème 2.2) de  $\Gamma_0 := \text{Graph}(v_0)$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ . Alors

- (1) Pour toute solution  $v$  de (1.4), on a  $\text{Graph}(v(\cdot, t)) \subset \Gamma_t$  pour tout  $t \geq 0$  ;
- (2) Les bords supérieur et inférieurs de  $\Gamma_t$  sont des graphes de fonctions définies, pour tous  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ , respectivement par

$$v^+(x, t) = \sup\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Gamma_t\} \quad \text{et} \quad v^-(x, t) = \inf\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Gamma_t\}.$$

Ces fonctions sont  $C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$ ,  $v^+$  est la solution maximale de (1.4) et  $v^-$  la solution minimale ;

- (3) L'équation (1.4) admet une unique solution si et seulement si  $\Gamma_t$  est d'intérieur vide pour tout  $t \geq 0$ .

Le théorème est illustré par la Figure 4. Bien sûr, la reformulation de la question

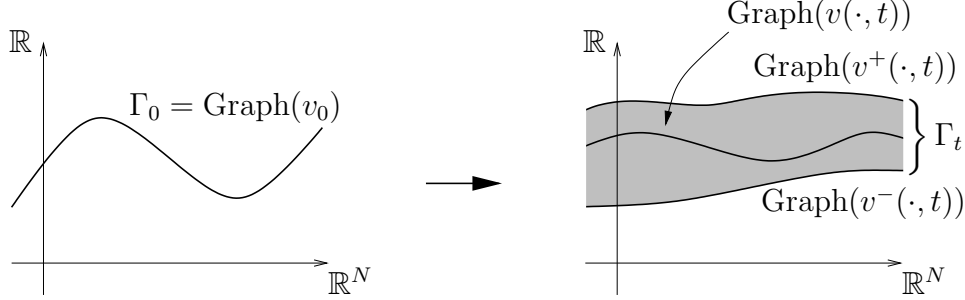


FIG. 4

d'unicité pour (1.4) peut sembler artificielle. En toute généralité, nous ne savons toujours pas si un graphe peut ou non développer un intérieur. Néanmoins, cette approche a produit des résultats nouveaux : un corollaire [4, Theorem 10.2] donne l'unicité d'une solution de (1.4) pour toute donnée initiale convexe (et cette solution est elle-même convexe en espace). La puissance de cette approche se comprend bien quand on essaie prouver le même résultat de manière analytique (comme nous l'avons fait de manière laborieuse dans [3]).

**2.2.2. Description du cas “convexe à l'infini”.** Dans [12], nous étendons ces résultats à des données initiales plus générales que les fonctions convexes. Nous commençons par démontrer une condition suffisante pour qu'une hypersurface ne développe pas d'intérieur.

**Théorème 2.5.** [12, Theorem 3.1] *Soit  $(\Gamma_0, \Omega_0, \tilde{\Omega}_0)$  un triplet d'ensembles de  $\mathbb{R}^{N+1}$  admissible pour l'approche par lignes de niveaux avec  $\Gamma_0$  d'intérieur vide. Supposons qu'il existe une famille  $(\mathcal{A}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de dilatations affines (les composées de translations, rotations et homothéties) de  $\mathbb{R}^{N+1}$  et une suite de nombres réels strictement positifs  $(\eta_\varepsilon)_\varepsilon$  tels que*

$$\mathcal{A}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I \quad \text{et} \quad \text{écart}(\Gamma_0, \mathcal{A}_\varepsilon(\Gamma_0)) \geq \eta_\varepsilon > 0.$$

*Alors le front  $\bigcup_{t \geq 0} \Gamma_t \times \{t\}$  a un intérieur vide dans  $\mathbb{R}^{N+1} \times [0, +\infty)$ .*

( $I$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^{N+1}$  et l'écart entre deux ensembles  $A$  et  $B$  est défini par  $\inf_{a \in A, b \in B} |a - b|$ ). Le théorème ci-dessus est énoncé volontairement avec des ensembles de  $\mathbb{R}^{N+1}$  car nous allons l'appliquer à des graphes de fonctions de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ . La preuve du théorème repose sur deux propriétés du mouvement par courbure moyenne. La première consiste en des propriétés de commutation de l'évolution généralisée avec les transformations affines considérées. La deuxième est un principe d'écartement (“avoidance principle”) qui est un raffinement du principe d'inclusion (1.13) : non seulement deux ensembles

ordonnés le restent au cours de l'évolution, mais en plus la distance entre les fronts augmente. Ces propriétés n'étant pas spécifiques au mouvement par courbure moyenne, le résultat énoncé dans [12, Theorem 3.1] est plus général et s'applique par exemple au mouvement par courbure gaussienne. Signalons enfin que ce résultat est proche de ceux de [Son93, BSS93] (cas de la courbure moyenne) mais leurs hypothèses ne conviennent pas aux ensembles non-bornés (des hypersurfaces) auxquels nous voulons l'appliquer.

Il est très simple de voir que le graphe d'une fonction convexe satisfait aux hypothèses du Théorème 2.5 (il suffit de considérer des homothéties dont le centre est un point de l'intérieur de l'épigraphe). C'est aussi le cas des fonctions convexes à l'infini (on perturbe de façon continue une fonction convexe sur un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^N$ ) :

**Théorème 2.6.** [12, Theorem 3.1] *Si  $v_0$  est une fonction convexe à l'infini alors (1.4) a une unique solution.*

La solution aura bien sûr la régularité donnée par le Théorème 2.3. Ce résultat peut apparaître comme une variation minime du cas convexe. Néanmoins, le mouvement par courbure moyenne, bien que local, a une vitesse de propagation infinie et est très instable ; une petite perturbation influe sur toute la solution instantanément, comme dans le cas de l'équation de la chaleur par exemple. Il n'est donc pas aisé d'obtenir de tels résultats. En particulier, nous n'avons pas pu démontrer que la solution obtenue est elle-même convexe à l'infini. Une notion proche de la convexité à l'infini a été utilisée dans un contexte de courbure gaussienne (pour un modèle d'érosion de galets) par Ishii et Mikami [IM04b].

2.2.3. *Le cas radial.* Le principal résultat de [7] est le suivant suivant.

**Théorème 2.7.** [7, Theorem I.1] *Si  $v_0 \in C(\mathbb{R}^N)$  est radiale alors il existe une unique solution  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$  de (1.4) et cette solution est elle-même radiale en espace.*

Ce résultat nous paraît important car c'est le premier résultat d'unicité pour (1.4) en dimension quelconque avec des solutions qui peuvent osciller arbitrairement à l'infini. En effet, les résultats précédents (cas convexe et convexe à l'infini) suggèrent que, plus que la croissance arbitraire, ce sont les oscillations qui sont une obstruction sérieuses aux preuves d'unicité en dimension plus grande que 2.

La preuve combine l'approche géométrique, des idées de la preuve du cas de la dimension  $N = 1$  et des techniques d'EDP classiques. L'approche géométrique nous donne deux solutions extrémales au problème :  $\varphi^\pm(|x|, t) := u^\pm(x, t)$  qui vérifient l'équation radiale de courbure moyenne pour les graphes

$$(2.10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_{rr}}{1 + \varphi_r^2} + (N - 1) \frac{\varphi_r}{r} \quad \text{dans } [0, +\infty) \times (0, +\infty).$$

En intégrant l'équation ci-dessus, nous prouvons alors l'estimation intégrale suivante : pour tout  $r_0 > 1$  et  $T > 0$ , il existe une constante  $C(T) > 0$  telle que

$$\int_{r_0}^{+\infty} (\varphi^+ - \varphi^-)(r, t) dr \leq C(T).$$

Cette estimation donne dans un sens une borne sur le volume du front. La fin de la démonstration consiste à montrer que  $r \mapsto (\varphi^+ - \varphi^-)(r, t)$  est croissant (car l'estimation intégrale entraîne alors  $\varphi^+ \equiv \varphi^-$ ).

Le travail le plus long est de construire, par des techniques classiques d'EDP, deux solutions  $\varphi^{g,\pm}$  de (2.10) à gradient extrémaux, c'est-à-dire vérifiant

$$\varphi_r^{g,-} \leq \varphi_r \leq \varphi_r^{g,+}$$

pour toute solution  $\varphi$  de (2.10). Nous prouvons ensuite que ces solutions correspondent en fait avec les solutions extrémales,  $\varphi^{g,\pm} = \varphi^\pm$ , ce qui termine la preuve.

**2.2.4. Commentaires et perspectives.** Nous pouvons espérer prouver l'unicité dans d'autres cas que ceux exposés ci-dessus, par exemple pour des données initiales  $v_0$  dont la courbure moyenne est positive (cette propriété est conservée au cours de l'évolution). Mais, même si cela nous semble encore hors de portée, le plus intéressant serait de répondre à la question d'unicité en toute généralité. Une piste possible (pour le moment infructueuse) est d'utiliser des formules de représentation stochastiques pour les solutions de (1.3) établies par Buckdahn, Cardaliaguet et Quincampoix [BCQ01] et Soner et Touzi [ST02, ST03].

**2.3. Équation de Hamilton-Jacobi non-locales non-monotones apparaissant en dynamique des dislocations et pour un modèle de FitzHugh-Nagumo.** Dans cette partie, nous allons décrire les résultats obtenus pour des équations eikonalles non-locales et non-monotones (au sens décrit dans l'introduction). Ces résultats ont été obtenus dans [8, 13, 16, 17] (voir aussi [14]) en collaboration avec Guy Barles, Pierre Cardaliaguet, Aurélien Monteillet et Régis Monneau. Nous ne les décrivons pas dans toute leur généralité ni un par un. Nous présenterons les résultats les plus significatifs obtenus pour nos deux problèmes modèles, les dislocations et le système de FitzHugh-Nagumo, de la façon la plus unifiée possible.

Rappelons l'équation présentée dans l'introduction qui englobe ces deux cas :

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c[\mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}](x, t) |Du(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où  $c[\cdot]$  est de la forme (1.6) et  $u_0$  est une donnée initiale que nous prendrons lipschitzienne (comme rappelé dans le § 2.1, dans l'approche par lignes de niveaux, on peut toujours choisir la donnée initiale lipschitzienne). Avant d'exposer les résultats (notion de solution, existence, unicité), présentons les dislocations et le système de FitzHugh-Nagumo.

**2.3.1. La dynamique des dislocations.** Les dislocations sont des défauts d'ordre microscopique qui apparaissent dans les cristaux et qui permettent d'expliquer leur propriétés plastiques macroscopiques (pour la physique, voir les livres de Nabarro [Nab69] et Hirth et Lothe [HL92], ou Lardner [Lar74] pour une présentation mathématique). Dans nos travaux, nous étudions un modèle particulier dû à Rodney, Le Bouar et Finel [RLBF03].

Une ligne de dislocation est une ligne de défaut qui se meut dans  $\mathbb{R}^3$ . Comme elle évolue préférentiellement dans des plans cristallographiques, on considère que le mouvement est planaire; en conséquence le front est de co-dimension 1 et on peut utiliser l'approche par lignes de niveau. De plus, nous travaillons avec des courbes fermées pour éviter des

problèmes de bord. La dynamique est donnée par une vitesse normale proportionnelle à la force de Peach-Koehler. Cette force a deux contributions : la première est une force propre de la dislocation créée par le champ électrique qu'elle génère (c'est cette force qui induit le terme non-local) ; la seconde est une force extérieure locale provenant par exemple des contraintes exercées sur le matériau. En résumé, la vitesse est donnée par (1.7) et nous en déduisons l'équation (2.11) (*a priori* dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$  mais nous nous plaçons en dimension  $N$ ).

Les dislocations sont étudiées en physique des matériaux, autant du point-de-vue théorique qu'expérimental. L'étude mathématique de la dynamique des dislocations a été entreprise par Régis Monneau et ses collaborateurs (voir entre autres [AHLBM04, AHLBM06, ACM05, ACMR06, CDLFM07], etc.). Ici nous nous cherchons plus particulièrement à définir des solutions (faibles) globales en temps pour lesquelles nous sommes capables de prouver des résultats d'unicité. Le premier travail dans cette direction est dû à Alvarez, Hoch, Le Bouar et Monneau [AHLBM06] où est obtenu un résultat d'existence et d'unicité en temps court (jusqu'à l'apparition de singularités). Le premier résultat d'unicité (pour des solutions de viscosité discontinues) a été démontré par Alvarez, Cardaliaguet et Monneau [ACM05] pour des vitesses positives (les lignes de dislocations "croissent") assez régulières ( $C^{1,1}$ ) en démarrant de dislocations initiales ayant une propriété de boule intérieure. Dans [8], avec Guy Barles, nous proposons une démonstration différente et plus simple de ce résultat ; les techniques d'EDP que nous développons (bornes inférieures de gradient sur le front, semiconvexité des solutions et estimations  $L^1$  des lignes de niveaux) nous ont permis de d'aboutir aux résultats de [13, 16]. Enfin, mentionnons le travail de Cardaliaguet et Marchi [CM06] pour des dislocations avec conditions de Neumann au bord.

Nous avons utilisé diverses hypothèses sur  $c_0$  et  $c_1$  qui ont été affaiblies au cours de nos différents travaux. Commençons par les hypothèse de bases :

**(dislo-1)**  $c_0, c_1 \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  et il existe des constantes  $\bar{c}, \bar{C} > 0$  telles que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^N, t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |c_0(x, t)| + |c_1(x, t)| &\leq \bar{c}, \\ |c_0(x, t) - c_0(y, t)| + |c_1(x, t) - c_1(y, t)| &\leq \bar{C}|x - y|. \end{aligned}$$

De plus  $c_0 \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^N))$ .

Notons que cette hypothèse entraîne que la vitesse est bornée :

$$c[\mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) \geq 0\}}](x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} c_0(x - y) \mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) \geq 0\}}(y) dy + c_1(x, t) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |c_0(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \bar{c}.$$

Ces hypothèses sont un peu plus générales que celles données par la physique (en réalité  $c_0$  ne dépend pas du temps et  $N = 2$ ). Enfin, rappelons que  $c_0$  change de signe (voir (1.15)).

**2.3.2. Un système apparaissant dans un modèle de FitzHugh-Nagumo.** Nous nous intéressons au système

$$(2.12) \quad \begin{cases} u_t = \alpha(v)|Du| & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ v_t - \Delta v = g^+(v) \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}} + g^-(v)(1 - \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}) & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0, v(\cdot, 0) = v_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$



Ce système correspond à un front  $\Gamma_t = \{u(\cdot, t) = 0\}$  évoluant avec une vitesse normale  $\alpha(v)$ , la fonction  $v$  étant elle-même solution d'une équation de réaction-diffusion différente suivant les régions séparées par  $\Gamma_t$ .

Ce problème est obtenu comme une asymptotique (quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) du système de type FitzHugh-Nagumo suivant

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_t^\varepsilon - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} f(u^\varepsilon, v^\varepsilon) & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ v_t^\varepsilon - \Delta v^\varepsilon = g(u^\varepsilon, v^\varepsilon) & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T), \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} f(u, v) = u(1-u)(u-a) - v & (0 < a < 1), \\ g(u, v) = u - \gamma v & (\gamma > 0). \end{cases}$$

Les fonctions  $\alpha$ ,  $g^+$  et  $g^-$  apparaissant dans (2.12) sont lipschitziennes sur  $\mathbb{R}$  et dépendent des fonctions  $f$  et  $g$ . De plus  $g^-$  et  $g^+$  sont bornées et satisfont  $g^- \leq g^+$  dans  $\mathbb{R}$ . Les données initiales  $u_0$  et  $v_0$  sont lipschitziennes et  $v_0$  est bornée et  $C^1$ .

Sans entrer dans les détails, mentionnons que ces équations modélisent la propagation d'ondes progressives dans des milieux comme le tissu cardiaque ou les fibres nerveuses. Il existe énormément de travaux en biologie, chimie, physique et mathématiques sur ce sujet, voir [Fit61, NAY60, Fif88, TF80, Has75, Che91].

La problématique est la même que pour les dislocations. Nous cherchons à construire des solutions globales en temps et à prouver leur unicité. Giga, Goto et Ishii [GGI92] ont prouvé l'existence de solutions faibles de ce problème. Soravia et Souganidis [SS96] ont établi rigoureusement la convergence de (2.13) vers le problème limite (2.12) et obtenu les propriétés de  $\alpha$ ,  $g^+$  et  $g^-$ . En particulier, ils ont trouvé des conditions sous lesquelles  $\alpha > 0$ . Jusqu'à présent, le problème de l'unicité était complètement ouvert. Notre principal résultat ([16, Theorem 4.1]) est la preuve de l'unicité pour (2.12) lorsque  $\alpha > 0$ .

Pour simplifier l'exposé, nous nous placerons dans le cas  $g^+ \equiv 1$ ,  $g^- \equiv 0$  et  $v_0 = 0$  (voir [16] pour le cadre général). Récapitulons le problème modèle et l'hypothèse utilisée ici : nous considérons (2.11) avec une vitesse donnée par (1.12), où  $v$  est solution de (1.10) et donc peut s'écrire sous la forme (1.11). On en déduit facilement les résultats suivants

**Lemme 2.8.** [16, Lemma 4.2] (*Propriétés de  $v$* ) Pour tout  $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T]; [0, 1])$ , la solution  $v$  de

$$(2.14) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \chi \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T), \quad v(x, 0) = 0,$$

est continue,  $v(\cdot, t)$  est  $C^{1,\beta}$  ( $\beta < 1$ ) et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$|v(x, t)| \leq t, \quad |Dv(x, t)| \leq \gamma_N \sqrt{t} \quad \text{et} \quad |v(x, t) - v(x, s)| \leq \gamma_N \sqrt{s} \sqrt{t-s} + (t-s),$$

où  $\gamma_N$  est une constante ne dépendant que de la dimension.

Nous supposons par la suite

**(FN-1)**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzien.

Du Lemme 2.8 et de **(FN-1)**, nous obtenons des propriétés sur la vitesse  $c[\chi] = \alpha(v)$ . En particulier, celle-ci est bornée (car  $v$  est bornée sur  $[0, T]$  indépendamment de  $\chi$ ).

Mais les deux caractéristiques principales du problème de FitzHugh-Nagumo sont, d'une part, la non-monotonie de l'équation (2.11) car aucune condition de monotonie n'est imposée sur  $\alpha$  et, d'autre part, même si  $\alpha$  est très régulier (par exemple  $C^\infty$ ), la régularité de la vitesse en espace est limitée par celle de  $v$  qui est au mieux  $C^{1,\beta}$  pour tout  $\beta < 1$  (d'après les résultats de régularité pour l'équation de la chaleur non-homogène avec second membre  $L^\infty$ ). Ce dernier point est une difficulté de taille qui nous empêche d'utiliser les techniques de [13] qui nécessitent une vitesse au moins  $C^{1,1}$  pour espérer obtenir des propriétés de boule intérieures pour le front (voir la discussion correspondante dans le § 2.3.7).

**2.3.3. Définition de solutions faibles.** Dans [13] et [17], nous introduisons une nouvelle notion de solutions pour ce genre d'équations :

**Définition 2.9.** [13, 17] Une fonction continue  $u : \mathbb{R}^N \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution faible de (2.11) s'il existe  $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T]; [0, 1])$  tel que

(1)  $u$  est une solution de viscosité au sens  $L^1$  de

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c[\chi](x, t)|Du(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

(2) Pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) > 0\}} \leq \chi(\cdot, t) \leq \mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) \geq 0\}} \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^N.$$

De plus, nous dirons que la solution  $u$  de (2.11) est classique si, de plus, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(2.16) \quad \mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) > 0\}} = \mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) \geq 0\}} \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^N.$$

La principale difficulté pour définir des solutions de ces équations géométriques est l'épaississement éventuel du front (*cf.* § 2.1). Dans ce cas, l'ensemble  $\{u(\cdot, t) = 0\}$  est de mesure non nulle et  $t \mapsto c[\mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) \geq 0\}}]$  n'est pas continu de  $[0, T]$  dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$ . Lorsque le front ne s'épaissit pas, le choix de  $\chi$  dans la définition est unique,

$$\chi(\cdot, t) = \mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) > 0\}} = \mathbb{1}_{\{u(\cdot, t) \geq 0\}}.$$

Cette définition a surtout un intérêt pour des équations qui sont bien posées lorsque la dépendance non-locale est "gelée", c'est-à-dire celles pour lesquelles nous savons résoudre (2.15) au sens des solutions de viscosité d'équations avec dépendance  $L^1$  en temps. En effet, dans les équations qui nous intéressent (en particulier les dislocations), la convolution régularise la vitesse en espace mais pas en temps (voir (1.8)) et  $(x, t) \mapsto c[\chi](x, t)$  est seulement mesurable en temps. Il existe une extension, due à Ishii [Ish85], de la théorie des solutions de viscosité dans ce cadre somme toute assez naturel dans les applications (mentionnons quand même que lorsque les discontinuités sont spatiales, le problème est autrement plus délicat!). Nous ne donnerons pas de détails ici et renvoyons le lecteur au travail de Ishii mentionné ci-dessus ainsi qu'à Nunziante [Nun90, Nun92], Bourgoing [Bou08a, Bou08b] et à [13, Appendix A] où les résultats dont nous avons besoin sont rappelés.

Cette notion de solution est très faible ; il n'y a pas unicité en général (*cf.* § 2.3.6) mais elle nous permet d'obtenir des résultats d'existence assez généraux qui produisent un objet avec lequel travailler pour montrer, essentiellement lorsque la vitesse est positive, que les solutions sont en fait classiques et aboutir à de l'unicité (voir § 2.3.7). Avant de présenter ces résultats, rappelons des propriétés de l'équation eikonale et en particulier une borne inférieure de gradient qui sera fondamentale dans la suite.

**2.3.4. Rappel sur l'équation eikonale et borne inférieure de gradient.** Considérons l'équation eikonale (1.2) assortie d'une condition initiale  $u_0$  et des hypothèses classiques (dans le cadre des solutions de viscosité) pour la vitesse :

**(eikonale)**  $c \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  et il existe des constantes  $\bar{c}, \bar{C} > 0$  telles que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^N, t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq c(x, t) \leq \bar{c}, \\ |c(x, t) - c(y, t)| &\leq \bar{C}|x - y|. \end{aligned}$$

Supposons de plus que

**(borne-inf)** (Borne inférieure de gradient sur le front)  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne et il existe  $\eta_0 > 0$  telle que

$$(2.17) \quad -|u_0| - |Du_0| + \eta_0 \leq 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \text{ au sens de viscosité.}$$

Cette dernière hypothèse est commentée après le théorème qui suit. La première partie de ce théorème est classique (elle est établie dans Crandall et Lions [CL83] et Ishii [Ish84]) et la deuxième est l'un des résultats principaux de ma thèse (de plus ce résultat reste valable pour l'équation eikonale avec une vitesse mesurable en temps).

**Théorème 2.10.** [1]

- (i) (*Régularité lipschitzienne*) Sous l'hypothèse **(eikonale)**, l'équation (1.2) a une unique solution de viscosité  $u$ . Si  $u_0$  est lipschitzienne, alors  $u$  est également lipschitzienne avec les estimations suivantes : pour tous  $x \in \mathbb{R}^N, t \in [0, T]$ ,

$$|Du(x, t)| \leq e^{\bar{C}T} |Du_0|_\infty, \quad |u_t(x, t)| \leq \bar{c}e^{\bar{C}T} |Du_0|_\infty.$$

- (ii) (*Préservation de la borne inférieure de gradient*) Supposons que **(eikonale)** et **(borne-inf)** sont vérifiées. Alors il existe  $\eta = \eta(T, \bar{C}, \bar{c}, \eta_0) > 0$  tel que

$$(2.18) \quad -|u(x, t)| - |Du(x, t)| + \eta \leq 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T] \text{ au sens de viscosité.}$$

Dans le contexte de l'approche par lignes de niveaux, les conditions (2.17) et (2.18) impliquent une borne inférieure de gradient sur le front  $\Gamma_t$ . En effet, imaginons que les fonctions soient lisses. Pour un point  $x$  du front,  $u(x, t) = 0$ , donc (2.18) entraîne  $|Du(x, t)| \geq \eta > 0$  et on en déduit en particulier, par le théorème des fonctions implicites, que le front est une hypersurface lisse. Comme les fonctions ne sont pas lisses en général, les bornes de gradient sont traduites par des propriétés de sous-solutions. On peut également exprimer ces conditions à l'aide des sur-différentiels (voir [1] pour des détails). Dans ce cadre non régulier, la régularité du front que l'on obtient est moins évidente et assez faible. Mais cela implique quand même que le front est de mesure nulle ce qui empêche son épaississement. De plus, puisque  $u$  et  $u_0$  sont lipschitziennes, la borne inférieure de

gradient est vérifié au sens classique presque partout. Cela ouvre la voie à l'obtention d'estimations intégrales pour les ensembles de niveaux  $\{-\delta \leq u(\cdot, t) \leq \delta\}$  (avec  $\delta > 0$  petit) qui seront cruciales.

À ce niveau, faisons une remarque fondamentale. Comme la vitesse est bornée (cf. § 2.3.1 et 2.3.2), disons par une constante  $\bar{V}$ , nous avons une propriété de vitesse finie de propagation qui entraîne que, avec les notations (2.8), si

$$(2.19) \quad \Gamma_0 \cup \Omega_0 = \{u_0 \geq 0\} \subset \bar{B}(0, R_0)$$

alors

$$(2.20) \quad \Gamma_t \cup \Omega_t = \{u(\cdot, t) \geq 0\} \subset \bar{B}(0, R_0 + \bar{V}T) \text{ pour tous } t \geq 0.$$

Dans le cas de fronts compacts, nous pouvons donc nous placer une fois pour toutes dans une grosse boule  $\bar{B}(0, R_0 + \bar{V}T)$ . Grâce à la forme particulière (1.6) de la vitesse dans nos problèmes modèles et aux hypothèses **(dislo-1)** et **(FN-1)**, on en déduit alors que la vitesse  $c[\chi]$  satisfait **(eikonale)** avec des constantes indépendantes de  $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T]; [0, 1])$  à support compact dans  $\bar{B}(0, R_0 + \bar{V}T)$ . Nous pouvons donc appliquer la plupart des résultats valables pour l'équation eikonale classique à nos problèmes.

**2.3.5. Existence de solutions faibles et solutions classiques.** Le principal intérêt de la notion de solution introduite ci-dessus est qu'elle permet d'obtenir des solutions à de nombreux problèmes du type (2.11) où la vitesse est donnée par (1.6).

**Théorème 2.11.** [13, 17] *Sous les hypothèses **(dislo-1)** (cas de dislocations) ou **(FN-1)** (cas du système de FitzHugh-Nagumo), pour toute donnée initiale  $u_0$  lipschitzienne satisfaisant (2.19), l'équation (2.11) admet au moins une solution faible  $u$  qui est lipschitzienne dans  $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ .*

Comme expliqué dans l'introduction, nous n'avons pas de principe de comparaison ce qui ne permet pas de construire des solutions de viscosité de (2.11) par la méthode de Peron classique. Nous devons suivre d'autres stratégies. Dans le cas des dislocations, l'existence est prouvée dans [13, Theorem 1.2] par une méthode d'approximation : la vitesse  $c[\mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}]$  est régularisée en régularisant la fonction caractéristique par une fonction continue. L'équation approchée a de bonnes propriétés permettant d'appliquer un théorème de point fixe de Schauder, puis d'extraire une suite convergente avec le théorème d'Ascoli. Il ne reste qu'à prouver que la limite obtenue est solution de notre problème ; ceci n'est pas complètement évident car nous ne sommes pas dans le cadre classique des solutions de viscosité (les coefficients sont seulement mesurables en temps). Il faut faire appel à un théorème de stabilité faible établi récemment par Barles [Bar06]. Dans le cas de FitzHugh-Nagumo, l'existence de solutions faibles différentes des nôtres est prouvée dans [GGI92]. Dans [17], nous présentons un cadre unifié produisant l'existence de solutions faibles (au sens de la Définition 2.9) pour le cas des dislocations et du système de FitzHugh-Nagumo mais aussi pour des équations plus générales avec des termes du second-ordre de type courbure. La preuve repose sur le théorème du point fixe de Kakutani (voir [AC84]) qui est déjà un des ingrédients principaux de la preuve de [GGI92]. Rappelons pour finir que, comme remarqué à la fin du § 2.3.4, la vitesse  $c[\chi]$  satisfait **(eikonale)** avec des constantes

indépendantes de  $\chi$  et donc nous pouvons utiliser le Théorème 2.10 (i) et (2.20) dans la preuve du Théorème 2.11.

Introduisons des hypothèses supplémentaires sous lesquelles les solutions faibles sont classiques.

**(dislo-2)** Pour tous  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $0 \leq -|c_0(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + c_1(x, t)$ .

**(FN-2)**  $0 \leq \alpha$ .

Ces deux hypothèses entraînent que la vitesse  $c[\chi](x, t)$  est positive, pour tous  $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T]; [0, 1])$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  et  $t \in [0, T]$ .

**Théorème 2.12.** [13, 17] *Sous les hypothèses **(dislo-1-2)** (cas de dislocations) ou **(FN-1-2)** (cas du système de FitzHugh-Nagumo), pour toute donnée initiale  $u_0$  lipschitzienne vérifiant (2.19) et **(borne-inf)**, les solutions faibles de (2.11) sont classiques.*

La preuve est immédiate en utilisant la préservation de la borne inférieure de gradient dans le cas de vitesses positives (Théorème 2.10) car dans ce cas le front est de mesure nulle et donc (2.16) est satisfait.

**2.3.6. Un contre-exemple à l'unicité en général.** L'exemple suivant se trouve dans [13, Exemple 3.1] et est inspiré de [BSS93]. Il met à profit la changement de signe dans la vitesse de l'équation eikonale. On se place en dimension  $N = 1$  et on considère l'équation (de type (2.11)) suivante

$$(2.21) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = (1 \star \mathbb{1}_{\{U(\cdot, t) \geq 0\}}(x) + c_1(t))|DU| & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, 2], \\ U(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases}$$

où nous choisissons  $c_1(x, t) := c_1(t) = 2(t-1)(2-t)$  et  $u_0(x) = 1 - |x|$ . On remarque que  $1 \star \mathbb{1}_A = \mathcal{L}^1(A)$  pour tout ensemble mesurable  $A \subset \mathbb{R}$ . D'autre part, le choix  $c_0 \equiv 1$  ne satisfait pas tout à fait à **(dislo-1)** mais peut être modifié en conséquence (sans changer la construction grâce à la vitesse finie de propagation).

On commence par étudier des problèmes auxiliaires sur les intervalles de temps  $[0, 1]$  et  $[1, 2]$  pour s'en servir ensuite pour construire une famille de solutions pour (2.21) sur  $[0, 2]$ .

**1. Construction d'une solution pour  $0 \leq t \leq 1$ .** La fonction  $x_1(t) = (t-1)^2$  est solution de  $\dot{x}_1(t) = c_1(t) + 2x_1(t)$  sur  $(0, 1)$  avec  $x(0) = 1$  (on note que  $\dot{x}_1 \leq 0$  dans  $[0, 1]$ ). Considérons

$$(2.22) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{x}_1(t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, 1], \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Par le Théorème 2.10, il existe une unique solution de viscosité continue  $u$  de (2.22). En utilisant la formule de Lax-Oleinik (voir Evans [Eva98] par exemple), on a même la formule explicite  $u(x, t) = u_0(|x| - x_1(t) + 1)$ . D'où, pour  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$(2.23) \quad \{u(\cdot, t) > 0\} = (-x_1(t), x_1(t)) \quad \text{et} \quad \{u(\cdot, t) \geq 0\} = [-x_1(t), x_1(t)].$$

Dans l'étape 3, nous verrons que  $u$  est solution de (2.21) sur  $[0, 1]$ .

**2. Construction de solutions pour  $1 \leq t \leq 2$ .** Pour toute fonction mesurable  $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ , soit  $y_\gamma$  l'unique solution de  $\dot{y}_\gamma(t) = c_1(t) + 2\gamma(t)y_\gamma(t)$  sur  $(1, 2)$  avec  $y_\gamma(1) = 0$ . Par

comparaison, on a  $0 \leq y_0(t) \leq y_\gamma(t) \leq y_1(t)$  pour  $1 \leq t \leq 2$ , où  $y_0, y_1$  sont les solutions de l'équation précédente obtenues en prenant  $\gamma(t) \equiv 0$  et 1. On note que  $\dot{y}_\gamma \geq 0$  dans  $[1, 2]$ . On considère ensuite

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} = \dot{y}_\gamma(t) \left| \frac{\partial u_\gamma}{\partial x} \right| & \text{dans } \mathbb{R} \times (1, 2], \\ u_\gamma(\cdot, 1) = u(\cdot, 1) & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases}$$

où  $u$  est la solution de (2.22). À nouveau, ce problème a une unique solution de viscosité continue  $u_\gamma$  qui est nulle si  $|x| \leq y_\gamma(t)$  et  $u_\gamma(x, t) = u(|x| - y_\gamma(t), 1)$  sinon (remarquer que, comme  $u(\cdot, 1) \leq 0$ , par le principe du maximum, on obtient  $u_\gamma \leq 0$  dans  $\mathbb{R} \times [1, 2]$ ). Il suit

$$(2.24) \quad \{u_\gamma(\cdot, t) > 0\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{u_\gamma(\cdot, t) \geq 0\} = \{u_\gamma(\cdot, t) = 0\} = [-y_\gamma(t), y_\gamma(t)].$$

3. Il y a plusieurs solutions faibles à (2.21). Pour  $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ , posons

$$\begin{aligned} c_\gamma(t) &= c_1(t) + 2x_1(t), & U_\gamma(x, t) &= u(x, t) & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \\ c_\gamma(t) &= c_1(t) + 2\gamma(t)y_\gamma(t), & U_\gamma(x, t) &= u_\gamma(x, t) & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R} \times [1, 2]. \end{aligned}$$

Alors, d'après les étapes 1 et 2,  $U_\gamma$  est l'unique solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\gamma}{\partial t} = c_\gamma(t) \left| \frac{\partial U_\gamma}{\partial x} \right| & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, 2], \\ U_\gamma(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

En prenant  $\chi_\gamma(\cdot, t) = \gamma(t) \mathbb{1}_{[-y_\gamma(t), y_\gamma(t)]}$  pour  $1 \leq t \leq 2$ , d'après (2.23) et (2.24), nous obtenons

$$\mathbb{1}_{\{U_\gamma(\cdot, t) > 0\}} \leq \chi_\gamma(\cdot, t) \leq \mathbb{1}_{\{U_\gamma(\cdot, t) \geq 0\}},$$

(voir Figure 5). Cela implique que toutes les fonctions  $U_\gamma$ , pour  $0 \leq \gamma(t) \leq 1$  mesurable, sont des solutions faibles de (2.21) d'où la non-unicité.

**2.3.7. Résultats d'unicité pour les équations de Hamilton-Jacobi non-locales non-monotones.** Nous avons obtenu plusieurs résultats d'unicité sous des hypothèses différentes dans le cas des dislocations. J'ai choisi d'axer la présentation sur le dernier en date (établi dans [16], voir Théorème 2.13). C'est celui qui requiert le moins de régularité sur la vitesse (elle est seulement lipschitzienne en espace) et qui permet de présenter en parallèle le cas des dislocations et de FitzHugh-Nagumo en faisant ressortir les différences fondamentales entre les deux problèmes. Les techniques de preuve sont expliquées dans le § 2.3.8.

Dans le cas où la vitesse est peu régulière, nous avons été obligés de supposer qu'elle est strictement positive, ce qui se traduit par un renforcement de **(dislo-2)** et **(FN-2)** :

**(dislo-3)** Il existe une constante  $\underline{c} > 0$  telle que, pour tous  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $0 < \underline{c} \leq -|c_0(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + c_1(x, t)$ .

**(FN-3)** Il existe une constante  $\underline{c} > 0$  telle que  $0 < \underline{c} \leq \alpha$ .

Le résultat est

**Théorème 2.13.** [16, Theorems 3.1 et 4.1] *Supposons que **(dislo-1-3)** (cas de dislocations) ou **(FN-1-3)** (cas du système de FitzHugh-Nagumo) sont vérifiées et que la donnée initiale  $u_0$  lipschitzienne satisfait **(borne-inf)**, (2.19) et que  $\Gamma_0 := \{u_0 = 0\}$  est  $C^2$ . Alors, il existe une unique solution de viscosité (classique) à (2.11).*

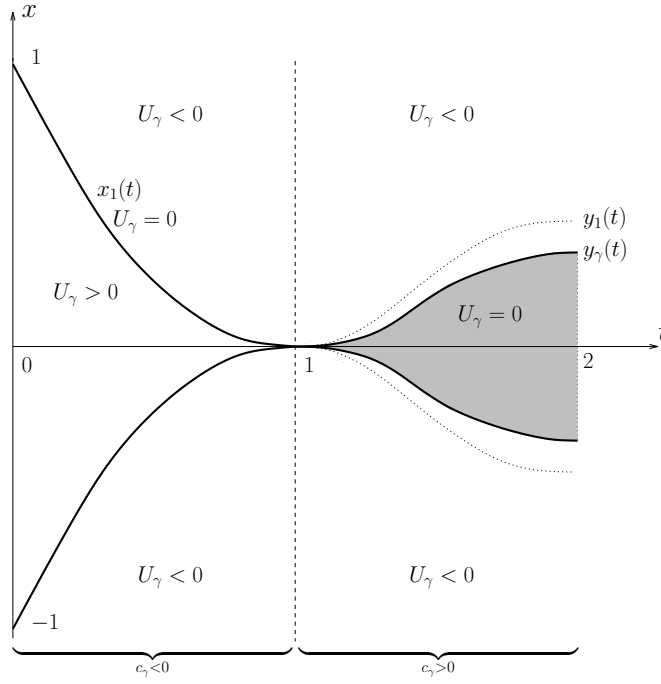


FIG. 5

Énonçons les résultats précédemment établis pour les dislocations lorsque la vitesse est plus régulière,  $C^{1,1}$  ou même seulement semiconvexe. Une fonction  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est dite semiconvexe s'il existe une constante  $L > 0$  telle que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^N$ ,

$$(2.25) \quad f(x + y) + f(x - y) - 2f(x) \geq -L|y|^2.$$

La notion de semiconvexité est centrale en solution viscosité car, en général, c'est la meilleure régularité que l'on puisse espérer pour une solution d'une équation de Hamilton-Jacobi. Nous n'entrerons pas dans les détails ici et renvoyons le lecteur au livre de Cannarsa et Sinestrari [CS04] sur la semiconcavité (une fonction est semiconcave si son opposé est semiconvexe; enfin une fonction qui est à la fois semiconvexe et semiconcave est  $C^{1,1}$ ). Nous avons les résultats suivants :

**Théorème 2.14.** *(Cas des dislocations) Supposons que **(dislo-1)** est vérifiée, que  $u_0$  satisfait (2.19) et **(borne-inf)** et que*

*$c_0(\cdot, t)$  et  $c_1(\cdot, t)$  sont semiconvexes uniformément par rapport à  $t \in [0, T]$ .*

- (1) [ACM05, Theorem 4.3] et [8, Theorem 4.2] *Si **(dislo-2)** est vérifiée et que  $u_0$  est semiconvexe, alors il existe une unique solution de viscosité (classique) à (2.11).*
- (2) [13, Theorem 1.3] *Si **(dislo-3)** est vérifiée, alors il existe une unique solution de viscosité (classique) à (2.11).*

2.3.8. *Éléments de preuve des théorèmes d'unicité.* Je donne ici une esquisse de preuve du Théorème 2.13; j'indiquerai, au moment opportun, comment obtenir les résultats du Théorème 2.14 si la vitesse est plus régulière. Le but de ce paragraphe est de donner une

idée de nos techniques, certains arguments ou calculs sont formels. Nous renvoyons aux articles pour une preuve rigoureuse (voir [16, Proofs of Theorems 3.1 and 4.1]).

Sous les hypothèses du Théorème 2.13, considérons deux solutions classiques  $u^1$  et  $u^2$  de (2.11) avec la même condition initiale  $u_0$  (leur existence est assurée par les Théorèmes 2.11 et 2.12).

*1. Estimations préliminaires communes.* Comme expliqué à la fin du § 2.3.4, les ensembles  $\{u^i(\cdot, t) \geq 0\}$ ,  $i = 1, 2$  sont inclus dans une boule  $\overline{B}(0, R_0 + \overline{V}T)$ . ( $\overline{V}$  ne dépend que des constantes du problème considéré) et les vitesses  $c[\mathbb{1}_{\{u^i(\cdot, t) \geq 0\}}]$  satisfont **(eikonale)** avec des constantes  $\bar{c}, \overline{C}$  ne dépendant elles-aussi que des constantes du problème. Ainsi les conclusions du Théorème 2.10 s'appliquent-elles aux  $u^i$ . En particulier, pour  $\bar{\delta} > 0$  assez petit, on a la borne inférieure de gradient

$$(2.26) \quad |Du^i| \geq \frac{\eta}{2} \quad \text{pour presque tout } (x, t) \text{ tel que } x \in \{-\bar{\delta} \leq u^i(\cdot, t) \leq \bar{\delta}\}.$$

Pour  $0 \leq \tau \leq T$ , on définit

$$\delta_\tau = \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, \tau]} |u^1 - u^2|.$$

Comme  $\delta_0 = 0$  et que les  $u^i$  sont continues, on peut prendre  $\tau > 0$  assez petit de sorte à ce que  $\delta_\tau < \bar{\delta}$ .

Comme les  $u^i$  vérifient (2.11), par un résultat classique de comparaison de solutions d'équations eikonales avec vitesses différentes (voir [8, Lemma 2.2]), on en déduit

$$(2.27) \quad \delta_\tau \leq |Du_0|_\infty e^{\overline{C}\tau} \int_0^\tau |c[\mathbb{1}_{\{u^1(\cdot, t) \geq 0\}}] - c[\mathbb{1}_{\{u^2(\cdot, t) \geq 0\}}](\cdot, t)|_\infty dt.$$

Le but est maintenant d'estimer l'intégrale par une quantité du type

$$(2.28) \quad o_\tau(1)\delta_\tau$$

pour conclure à  $\delta_\tau = 0$  pour  $\tau$  assez petit. Par un argument de continuation, on en déduit alors  $\delta_T = 0$  ce qui termine la preuve. À ce niveau, séparons le cas des dislocations et celui du modèle de FitzHugh-Nagumo; la différence essentielle entre les deux problèmes vient du noyau de convolution intervenant dans la vitesse. Pour les dislocations, ce noyau est borné ce qui permet des estimations relativement simples et générales. Pour le modèle de FitzHugh-Nagumo, c'est le noyau de la chaleur qui apparaît et ce dernier n'est pas borné (en temps) ce qui induit une difficulté supplémentaire et nous a forcé à établir des estimations de périmètres très fines et spécifiques pour obtenir (2.28).

*2. Cas des dislocations.* On poursuit le calcul (2.27) en utilisant la forme explicite (1.7) de la vitesse :

$$\begin{aligned} \delta_\tau &\leq |Du_0|_\infty e^{\overline{C}\tau} \int_0^\tau |c_0(\cdot, t) \star (\mathbb{1}_{\{u^1(\cdot, t) \geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{u^2(\cdot, t) \geq 0\}})|_\infty dt \\ &\leq \bar{c}|Du_0|_\infty e^{\overline{C}\tau} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^1 \leq 0\}} + \mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^2 \leq 0\}}) dx dt, \end{aligned}$$

en utilisant que  $c_0$  est borné (voir **(dislo-1)**) et que

$$(2.29) \quad |\mathbb{1}_{\{u^1 \geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{u^2 \geq 0\}}| \leq \mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^1 \leq 0\}} + \mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^2 \leq 0\}} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, \tau].$$



À ce niveau, on est ramené à estimer

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^i \leq 0\}} dx dt.$$

Selon les hypothèses, il y a plusieurs manières de procéder, chacune conduisant à l'un des résultats cités plus haut. Commençons par un calcul naturel, qui permet de bien comprendre pourquoi les ingrédients principaux de la preuve du Théorème 2.14 sont la borne inférieure de gradient et des estimations de périmètres des lignes de niveaux. Ensuite, nous décrirons la méthode utilisée pour prouver le Théorème 2.13. Par la formule de la co-aire, en utilisant (2.26), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^i(\cdot, t) \leq 0\}} dx &= \int_{-\delta_\tau}^0 \int_{\{u^i(\cdot, t)=s\}} |Du|^{-1} d\mathcal{H}^{N-1} ds \\ &\leq \frac{2\delta_\tau}{\eta} \sup_{-\delta_\tau \leq s \leq 0} \text{Per}(\{u(\cdot, t) = s\}). \end{aligned}$$

Si l'on est capable de produire des bornes de périmètres pour les ensembles niveau  $\{u(\cdot, t) = s\}$  avec  $s$  proche de 0 pour tout  $t \in [0, \tau]$ , on peut conclure. C'est ce qui a été fait dans [ACM05], où ces bornes sont la conséquence de la propagation, au cours du temps, de la propriété de boule intérieure pour le front si la vitesse est  $C^{1,1}$ . Dans [8], nous avons suivi une stratégie qui se révèle équivalente (la semiconvexité de  $u(\cdot, t)$  associée à la borne de gradient sur le front est équivalente à la propriété de boule intérieure du front, cf. [8, Lemma A.1]). Mais cette stratégie utilise des estimations  $L^1$  du volume  $\mathcal{L}^N(\{-\delta_\tau \leq u^i \leq 0\})$  ([8, Section 3]) qui évitent les estimations de périmètres et que nous avons pu améliorer pour traiter des vitesses moins régulières (voir ci-dessous). Enfin, dans [13], nous prouvons que, si **(dislo-3)** est satisfaite et la vitesse est semiconvexe, on a création d'une boule intérieure pour le front au cours de l'évolution, ce qui permet là aussi de récupérer les estimations de périmètres suffisantes pour conclure.

Reprenons notre preuve du Théorème 2.13. Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue telle que  $\delta_\tau \varphi' = \mathbb{1}_{[-\delta_\tau, 0]}$  (il suffit de prendre  $\varphi$  nulle sur  $(-\infty, -\delta_\tau]$ , valant 1 sur  $\mathbb{R}^+$  et affine de pente  $1/\delta_\tau$  sur  $[-\delta_\tau, 0]$ ). Il suit (voir [16, Proposition 5.5] pour les détails), en utilisant les hypothèses, la borne inférieure de gradient et l'équation que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^i \leq 0\}} dx dt &= \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\tau \varphi'(u^i(x, t)) dx dt \\ &\leq \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\tau \varphi'(u^i(x, t)) \frac{c[\mathbb{1}_{\{u^i \geq 0\}}](x, t)}{\underline{c}} \frac{|Du^i|}{\eta} dx dt \\ &= \frac{\delta_\tau}{\underline{c}\eta} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} \varphi'(u^i(x, t)) \frac{\partial u^i}{\partial t} dx dt \\ &= \frac{\delta_\tau}{\underline{c}\eta} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(u^i(x, t)) dx dt \\ &\leq \frac{\delta_\tau}{\underline{c}\eta} (\mathcal{L}^N(\{u^i(\cdot, \tau) \geq -\delta_\tau\}) - \mathcal{L}^N(\{u_0 \geq 0\})). \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominé de Lebesgue entraîne que le majorant est un  $o_\tau(1)\delta_\tau$  ce qui termine la preuve dans le cas des dislocations.

3. *Cas du modèle de FitzHugh-Nagumo.* Dans ce cas, la différence des vitesses dans (2.27) s'estime par

$$|c[\mathbb{1}_{\{u^1(\cdot, t) \geq 0\}}] - c[\mathbb{1}_{\{u^2(\cdot, t) \geq 0\}}](\cdot, t)|_\infty = |(\alpha(v_1) - \alpha(v_2))(\cdot, t)|_\infty \leq \overline{C}|(v_1 - v_2)(\cdot, t)|_\infty,$$

où  $v_i$  est la solution de (2.14) avec  $\chi = \mathbb{1}_{\{u^i \geq 0\}}$ . On poursuit alors le calcul (2.27) en utilisant la forme explicite de  $v_i$  donnée par le Lemme 2.8 et (2.29) :

$$(2.30) \quad \delta_\tau \leq |Du_0|_\infty e^{\overline{C}\tau} \int_0^\tau \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t - s) (\mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^1 \leq 0\}} + \mathbb{1}_{\{-\delta_\tau \leq u^2 \leq 0\}}) dy ds dt.$$

À ce niveau, on ne peut pas majorer  $G$  (ce qui permettrait de poursuivre la preuve comme dans le cas des dislocations). De plus, la faible régularité de la vitesse (seulement lipschitzienne en espace) ne nous permet pas d'espérer des propriétés de propagation de boule intérieure. Il nous a fallu travailler beaucoup plus pour prouver une propagation de cône intérieur uniforme et prouver que cette propriété de cône uniforme permettant d'obtenir des estimations de périmètres suffisantes pour conclure.

Nous commençons par prouver que

$$\{-\delta_\tau \leq u^i \leq 0\} \subset E_i(t) := \left( \{u^i(\cdot, t) \geq 0\} + \frac{2\delta_\tau B(0, 1)}{\eta} \right) \setminus \{u^i(\cdot, t) \geq 0\}.$$

La somme ci-dessus est ensembliste (voir les notations au § 5). L'inclusion signifie qu'on peut contrôler les ensembles de niveau  $\{-\delta_\tau \leq u^i \leq 0\}$  en "élargissant" un peu (de  $2\delta_\tau/\eta$ ) l'ensemble de niveau 0. Ceci n'est bien sûr pas vrai en général (si les fonctions sont "trop plates") et utilise de façon essentielle la borne inférieure de gradient.

L'étape suivante consiste à montrer que les ensembles  $\{u^i(\cdot, t) \geq 0\}$  satisfont une propriété de cône intérieur uniforme, c'est-à-dire qu'en tout point  $x$  du bord  $\partial\{u^i(\cdot, t) \geq 0\}$ , on peut placer un cône  $C_x^{\rho, \theta}$  d'ouverture  $\theta$  et de hauteur  $\rho$  dont le sommet est  $x$  et  $C_x^{\rho, \theta} \subset \{u^i(\cdot, t) \geq 0\}$  (voir Figure 6). La preuve de ce résultat s'appuie sur **(FN-3)**

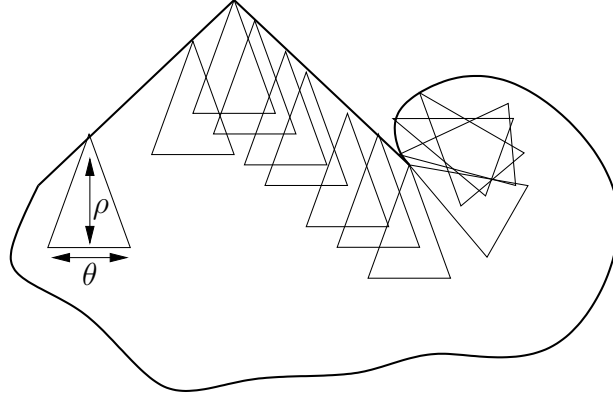


FIG. 6

(vitesse strictement positive) et le principe du maximum de Pontryagine non-lisse (voir Clarke [Cla83]) qui entraînent la création d'un cône intérieur uniforme (notons que ce genre de technique est déjà utilisé pour la création de la boule intérieure uniforme dans

[13]). Comme cette propriété est de plus vérifiée au temps initial (à cause de la régularité de  $\Gamma_0$ ), on obtient le résultat.

Puis, nous prouvons qu'un ensemble borné ayant la propriété de cône intérieur uniforme est de périmètre fini :

**Théorème 2.15.** [16, Theorem 5.8] *Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^N$  ayant la propriété de cône intérieur uniforme d'ouverture  $\theta$  et de hauteur  $\rho$ . Alors, il existe une constante  $\Lambda$  (dépendant de  $N, \rho, \theta$ ) telle que, pour tout  $R > 0$ ,*

$$(2.31) \quad \mathcal{H}^{N-1}(\partial K \cap \bar{B}(0, R)) \leq \Lambda \mathcal{L}^N(K \cap \bar{B}(0, R + \rho/4)).$$

La preuve de ce résultat n'est pas évidente et utilise des outils élaborés comme le théorème de recouvrement de Besicovitch.

Les deux résultats précédents impliquent l'estimation suivante (cf. [16, Lemma 4.4]) :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t - s) \mathbb{1}_{E_i(t)} dy ds \leq \tilde{\Lambda} \frac{2\delta_\tau}{\eta},$$

où  $\tilde{\Lambda}$  dépend des données du problème et de  $\Lambda$  (donné par (2.31)). En reprenant (2.30), on obtient alors aisément un majorant du type (2.28), ce qui termine la preuve.

**2.3.9. Commentaires et perspectives.** Les techniques développées pour démontrer la propagation de la propriété de boule intérieure uniforme ont été utilisées en premier lieu dans Cannarsa et Frankowska [CF06] (voir aussi Cannarsa et Cardaliaguet [CC06]). La définition de la propriété de boule intérieure uniforme se déduit facilement de celle donnée plus haut pour les cônes intérieurs (sinon nous renvoyons aux articles sus-cités ou à [8, Appendix A]). Une autre approche (fondée sur la préservation de la semiconvexité et la borne inférieure de gradient), que nous avons exploitée dans [8], utilise les résultats de [1]. La version du principe de Pontryagine (avec une dynamique peu régulière) dont nous avons besoin pour les résultats de propagation de boules ou cônes intérieurs provient de Clarke [Cla83]. Nous n'avons pas réussi à nous passer de ces arguments de théorie du contrôle et optimisation pour obtenir nos résultats. Il serait intéressant de mieux comprendre ces résultats (en particulier, peut-on faire une preuve de type EDP?). Enfin, nous renvoyons le lecteur au livre de Evans et Gariepy [EG92] pour la formule de la co-aire et le théorème de Besicovitch.

Les travaux présentés dans ce chapitre n'ont pas été écrits en recherchant la plus grande généralité ; nous avons préféré nous concentrer sur deux problèmes modèles qui se révèlent importants pour les applications. Il est possible de les généraliser. La borne inférieure de gradient, qui est un outil essentiel dans nos preuves, est intimement liée à l'équation eikonale et à la vitesse finie de propagation. On ne peut donc pas espérer un tel résultat pour des équations du second-ordre avec de la courbure (où la vitesse de propagation est infinie, voir § 2.2.2). Néanmoins, nous pensons qu'on peut obtenir des résultats dans cette direction (par exemple, le Théorème 2.5 peut être interprété comme une sorte de borne inférieure). Dans le cadre de l'ANR MICA, nous comptons, avec Guy Barles, soumettre ce sujet à un post-doctorant.

## 2.4. Problèmes d'évolution de front apparaissant en optimisation de forme.

Dans ce chapitre, je décris les résultats obtenus avec Pierre Cardaliaguet dans [10, 11].

2.4.1. *Les solutions de viscosité géométriques.* La notion de solutions géométriques introduite par Cardaliaguet [Car00, Car01] est directement inspirée des solutions de viscosité pour les EDP de Crandall et Lions et est particulièrement bien adaptée aux évolutions géométriques du type (2.1), en particulier lorsqu'il est difficile d'écrire l'équation géométrique de l'approche par lignes de niveaux. Cette notion de solution a également été utilisée par Cardaliaguet et Rouy [CR06] pour le problème de Hele-Shaw (1.23). Des approches similaires peuvent être trouvées dans les travaux de Andrews et Feldman [AF02], Barles, Soner et Souganidis [BSS93, Son93, BS98].

La définition des solutions géométriques consiste à “mimer” celle des solutions de viscosité classiques au niveau ensembliste. En solutions de viscosité, on remplace les dérivées d'une fonction en un point par celles d'une fonction-test lisse qui “touche” le graphe de cette fonction en ce point. Dans ce cas géométrique, on remplace la vitesse en un point où l'ensemble n'est pas suffisamment régulier par la vitesse d'un ensemble lisse tangent à l'ensemble considéré en ce point.

Nous aurons besoin des définitions suivantes qui sont illustrées sur la Figure 7 (pour être lisibles, les dessins représenteront des tubes de dimension 2).

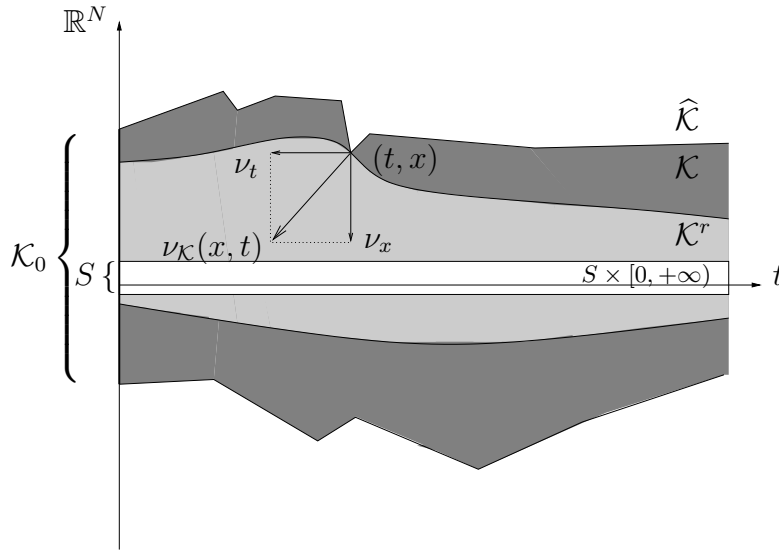


FIG. 7

- Nous dirons que  $\mathcal{K}$  est un tube si c'est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$  tel que  $\overline{\mathcal{K}} \cap (\mathbb{R}^N \times [0, T])$  est un compact de  $\mathbb{R}^{N+1}$  pour tout  $T > 0$ . La tranche  $t$  du tube est définie par  $\mathcal{K}_t = \{x \in \mathbb{R}^N : (x, t) \in \mathcal{K}\}$ . Pour toute famille d'ensembles  $(\Omega_t)_{t \geq 0}$  de  $\mathbb{R}^N$  (uniformément bornés sur  $[0, T]$ ), on peut naturellement fabriquer un tube en les empilant en temps; c'est bien entendu la raison d'être de cette définition où  $\mathcal{K}$  est alors le graphe en espace-temps de la famille  $(\Omega_t)_{t \geq 0}$ . Comme on va utiliser les tubes pour définir des solutions aux problèmes (1.20) et (1.28), nous supposons une fois pour toute (pour ne pas avoir à le répéter) que toutes les tranches des tubes qui interviennent contiennent strictement la source  $S$  (définie à la suite de la formule (1.17)).

- Le complémentaire  $\widehat{\mathcal{K}}$  de  $\mathcal{K}$  est défini par

$$\widehat{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)) \setminus \mathcal{K}.$$

- Un tube  $\mathcal{K}$  est dit de classe  $C^s$  ( $s$  sera pris égal à 1, 2 ou  $(1, 1)$ ) si son bord  $\partial\mathcal{K}$  est de classe  $C^s$ .
- Un tube  $\mathcal{K}^r$  est dit régulier (ou semi-continu inférieurement) si la condition suivante est satisfaite

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathcal{K}_t^r, \text{ si } t_n \rightarrow t^-, \text{ alors } \exists x_n \in \mathcal{K}_{t_n}^r \text{ tel que } x_n \rightarrow x.$$

Cette condition technique interdit les vitesses d'évolution infinies, voir ci-dessous.

- Si  $\mathcal{K}$  est un tube de classe au moins  $C^1$ , sa vitesse normale en  $(x, t) \in \partial\mathcal{K}$  est définie par

$$(2.32) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{K}_t}(x) = -\frac{\nu_t}{\nu_x},$$

où  $\nu_{\mathcal{K}}(x, t) = (\nu_x, \nu_t)$  est la normale unitaire extérieure à  $\mathcal{K}$ . Un simple calcul montre que cette définition est cohérente avec l'évolution classique des ensembles  $\Omega_t$ . Un tube  $C^1$  est régulier si et seulement si  $\nu_x \neq 0$  pour tout  $(x, t) \in \partial\mathcal{K}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_t}(x) < \infty$ .

- Un tube  $\mathcal{K}^r$  régulier de classe  $C^2$  est dit tangent extérieurement à un tube  $\mathcal{K}$  au point  $(x, t)$  si

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^r \quad \text{et} \quad (x, t) \in \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}^r.$$

Il est dit tangent intérieurement si

$$\mathcal{K} \supset \mathcal{K}^r \quad \text{et} \quad (x, t) \in \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}^r.$$

Sur la Figure 7, le tube régulier  $\mathcal{K}^r$  est tangent intérieurement à  $\mathcal{K}$  en  $(t, x)$ .

Utilisons cette terminologie pour définir des solutions à problème d'évolution de type (2.1) que nous écrivons sous la forme

$$(2.33) \quad \vec{\mathcal{V}}_{\Omega_t}(x) = h_\lambda(x, \Omega_t) \vec{n}_{\Omega_t}(x) := (h_1(\vec{n}_{\Omega_t}(x), D\vec{n}_{\Omega_t}(x)) + \lambda h_2(x, \Omega_t)) \vec{n}_{\Omega_t}(x),$$

de manière à pouvoir englober les deux problèmes non-locaux (1.20) et (1.28) décrits dans l'introduction. Pour (1.20),  $h_1 = -1$  et pour tout ensemble  $S \subset \subset \Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$  et  $x \in \partial\Omega$ ,

$$(2.34) \quad h_2(x, \Omega) = |Dv(x)|^2 \quad \text{avec } v \text{ solution de (1.19).}$$

Pour (1.28),  $h_2$  est défini comme ci-dessus et, pour toute matrice  $M \in \mathcal{S}_N$  et  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$h_1(x, M) = -\text{Trace}(M).$$

Dans ce dernier cas, on écrira  $h_1 = H_\Omega(x)$  où  $H_\Omega(x)$  représente la courbure moyenne de  $\partial\Omega$  au point  $x$  (avec la convention que la courbure moyenne est négative pour les ensembles convexes).

On remarque que la vitesse (2.33) n'est pas définie pour tout ensemble  $\Omega$ . Pour calculer le terme non-local de Hele-Shaw qui apparaît dans la vitesse, on doit résoudre (1.19) ce qui demande que le bord soit globalement  $C^{1,1}$ . Pour calculer la courbure moyenne en un point  $x$  du bord, ce dernier doit être  $C^2$  au voisinage de  $x$ . Si maintenant  $\mathcal{K}$  est un tube, pour pouvoir calculer la vitesse (2.33) en un point  $(x, t)$  de son bord, il suffit que ce tube soit régulier de classe  $C^{1,1}$  et de classe  $C^2$  au voisinage de  $(x, t)$  (cela permet

de définir (2.32) et, en appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtient que la tranche  $t$  est globalement  $C^{1,1}$  et localement  $C^2$ ). Enfin, chaque tranche doit contenir strictement la source. On appellera tubes tests de tels tubes.

Tout ceci permet de donner la définition suivante.

**Définition 2.16.** [10, Definition 1] Soit  $\mathcal{K}$  un tube et  $S \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^N$  un ouvert initial.

- (1) Le tube  $\mathcal{K}$  est une sous-solution du problème d'évolution (2.33) si  $\mathcal{K}$  est semi-continu inférieurement et si, pour tout tube test  $\mathcal{K}^r$  qui est tangent extérieurement à  $\mathcal{K}$  en  $(x, t)$ , on a

$$\mathcal{V}_{\mathcal{K}_t^r}(x) \leq h_\lambda(x, \mathcal{K}_t^r) \quad \text{si } t > 0$$

et  $\overline{\mathcal{K}}_0 \subset\subset \overline{\Omega}_0$ .

- (2) Le tube  $\mathcal{K}$  est une sur-solution du problème d'évolution (2.33) si  $\widehat{\mathcal{K}}$  est semi-continu inférieurement et si, pour tout tube test  $\mathcal{K}^r$  qui est tangent intérieurement à  $\mathcal{K}$  en  $(x, t)$ , on a

$$\mathcal{V}_{\mathcal{K}_t^r}(x) \geq h_\lambda(x, \mathcal{K}_t^r) \quad \text{si } t > 0$$

et  $\widehat{\mathcal{K}}_0 \subset\subset \overline{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_0}$ .

- (3) Enfin, le tube  $\mathcal{K}$  est une solution si c'est à la fois une sous- et une sur-solution.

2.4.2. *Construction de solutions de viscosité géométriques pour le problème d'évolution.* Nos résultats principaux sont les suivants

**Théorème 2.17.** [10, Theorem 3] (*Principe d'inclusion*) Soit  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ,  $\mathcal{K}^1$  une sous-solution de (2.33) avec  $\lambda_1$  et  $\mathcal{K}^2$  une sur-solution de (2.33) avec  $\lambda_2$ . Si  $\overline{\mathcal{K}}_0^1 \cap \widehat{\mathcal{K}}_0^2 = \emptyset$ , alors

$$\overline{\mathcal{K}}_t^1 \cap \widehat{\mathcal{K}}_t^2 = \emptyset \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ce résultat est le plus important de notre travail [10]. Bien qu'assez intuitif (vu la monotonie du problème), sa preuve est longue et difficile. Avant d'en donner un aperçu, énonçons les conséquences du Théorème 2.17.

**Proposition 2.18.** [10, Proposition 4] Pour tout  $S \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^N$ , il existe au moins une solution du problème d'évolution (2.33). Plus précisément, il existe une plus grande solution  $\mathcal{K}^+$  qui contient toutes les sous-solutions et une plus petite solution  $\mathcal{K}^-$  qui est contenue dans toutes les sur-solutions.

La construction de solutions repose sur la méthode Perron, classique en solutions de viscosité depuis le travail de Ishii [Ish87] (voir Cardaliaguet [Car00] dans le contexte présent). On ne s'attend pas à de l'unicité en général. L'existence d'une plus grande et plus petite solution distinctes est à rapprocher du phénomène d'épaississement expliqué dans le § 2.1 (voir aussi Théorème 2.4). On a cependant un résultat d'unicité générique, voir [10, Proposition 5]. On prouve aussi un résultat de stabilité [10, Proposition 6] au sens des limites d'ensembles de Kuratowski.

2.4.3. *Esquisse de la preuve du principe d'inclusion.* La preuve du Théorème (2.17) est difficile et technique. J'essaie d'en donner les idées principales sans entrer dans les détails en m'appuyant sur des dessins.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe  $t^* > 0$  tel que  $x^* \in \overline{\mathcal{K}_{t^*}^1} \cap \widehat{\mathcal{K}_{t^*}^2} \neq \emptyset$  (voir Figure 8). Le but est de comparer la vitesse de chacun des tubes en  $(x^*, t^*)$ . En effet,

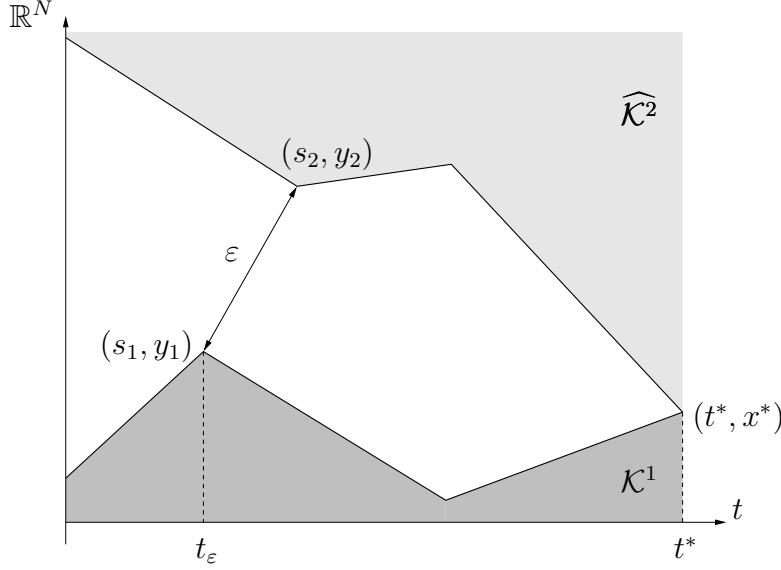


FIG. 8

comme  $\mathcal{K}_{t^*}^1 \subset \mathcal{K}_{t^*}^2$  et  $x^* \in \partial\mathcal{K}_{t^*}^1 \cap \partial\mathcal{K}_{t^*}^2$ , par monotonie de l'évolution (voir (1.14)), on doit avoir  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_{t^*}^1}(x^*) \leq \mathcal{V}_{\mathcal{K}_{t^*}^2}(x^*)$  ce qui est contradictoire (le tube 1 ne peut pas "rattrapper" le tube 2 avec une vitesse inférieure). Il est délicat de justifier ce raisonnement car les tubes ne sont pas nécessairement lisses au point de contact. On ne peut donc pas faire passer un tube régulier lisse entre les deux (tangent intérieurement à  $\widehat{\mathcal{K}^2}$  et extérieurement à  $\mathcal{K}^1$ ) de façon à calculer leur vitesse en  $(x^*, t^*)$ .

L'idée, pour surmonter cette difficulté, est de revenir un petit peu en arrière, de manière à créer un espace entre  $\mathcal{K}^1$  et  $\widehat{\mathcal{K}^2}$  : pour  $\varepsilon > 0$  petit, on définit le premier temps  $t_\varepsilon$  où les deux tubes sont à distance  $\varepsilon$  :

$$t_\varepsilon = \inf \left\{ t > 0 : \min_{x \in \mathcal{K}_t^1} \text{dist}((x, t), \widehat{\mathcal{K}^2}) \leq \varepsilon \right\}$$

(voir Figure 8). Maintenant, si on tronque  $\mathcal{K}^1$  en  $t_\varepsilon$  en considérant le nouveau tube  $\widetilde{\mathcal{K}^1} := \mathcal{K}^1 \cap (\mathbb{R}^N \times [0, t_\varepsilon])$ , il se trouve que  $\widetilde{\mathcal{K}^1}$  est toujours une sous-solution de (2.33) avec  $\lambda_1$ . On s'est donc ramené au cas de deux tubes  $\widetilde{\mathcal{K}^1}$  et  $\widehat{\mathcal{K}^2}$  arbitrairement proches mais à distance  $\varepsilon$  strictement positive. Dans la suite on supposera que cette distance  $\varepsilon$  entre  $\widetilde{\mathcal{K}^1}$  et  $\widehat{\mathcal{K}^2}$  est réalisée entre les points  $(y_1, s_1) \in \partial\widetilde{\mathcal{K}^1}$  et  $(y_2, s_2) \in \partial\widehat{\mathcal{K}^2}$  (cf. Figure 9). Il est dès lors possible d'interposer un tube lisse entre les deux qui va servir à calculer leurs vitesses.

Dans cette optique, rappelons le lemme d'interposition d'Ilmanen.

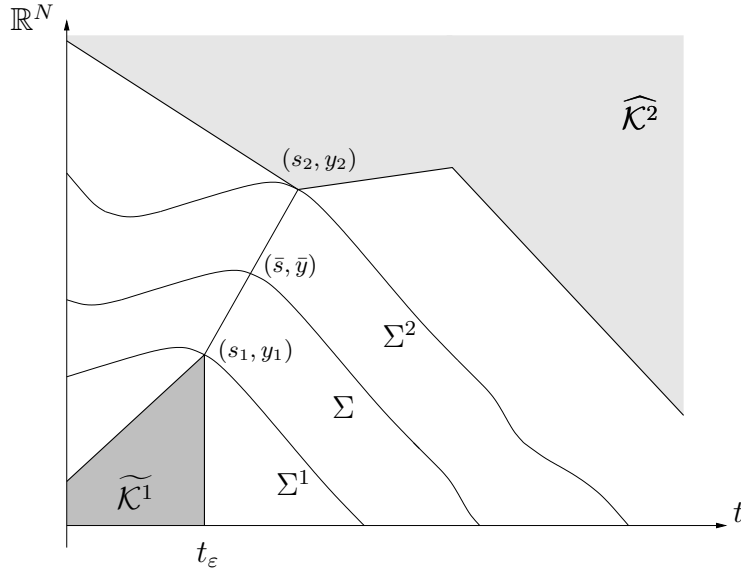


FIG. 9

**Lemme 2.19.** [Ilm93b] Soient  $K_1$  un compact de  $\mathbb{R}^N$  et  $K_2$  un fermé de  $\mathbb{R}^N$  qui sont disjoints. Alors il existe un ensemble fermé  $\Sigma$  dont le bord est de classe  $C^{1,1}$  tel que

$$K_1 \subset \Sigma, \quad \Sigma \cap K_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad \text{dist}(K_1, K_2) = \text{dist}(K_1, \partial\Sigma) + \text{dist}(\partial\Sigma, K_2).$$

Le point important dans ce résultat est bien sûr la troisième égalité qui signifie, qu'à translation près,  $\Sigma$  est tangent à  $K_1$  et  $K_2$  (pour une illustration, voir Figure 9 avec  $K_1 := \widetilde{K}^1$  et  $K_2 := \widehat{K}^2$ ). Aucune régularité n'est imposée sur  $K_1$  et  $K_2$  ce qui est surprenant. D'autre part, la régularité de  $\Sigma$  est optimale; on le voit en prenant pour  $K_1$  un carré et pour  $K_2$  le complémentaire d'un carré contenant  $K_1$  (cf. Figure 10). Ce lemme est

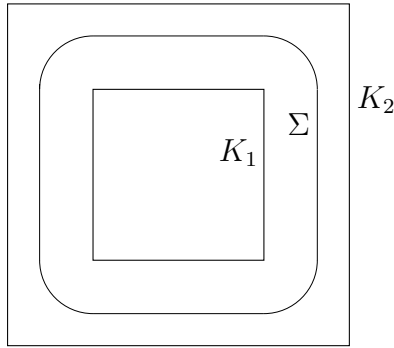


FIG. 10

déjà un argument fondamental de [Car01, CR06] qui permet de construire des ensembles tests pour calculer les vitesses de problèmes d'évolution. Ici on fait face à deux difficultés supplémentaires qui ne permettent pas d'appliquer le Lemme 2.19 tel quel avec  $\widetilde{K}^1$  et  $\widehat{K}^2$ . Tout d'abord, l'ensemble  $\Sigma$  obtenu est quelconque, rien ne permet d'affirmer que c'est un tube régulier (il est crucial que la normale en espace de  $\Sigma$  ne s'annule jamais). D'autre part,  $\Sigma$  est de classe  $C^{1,1}$ , ce qui est la régularité requise pour donner un sens au terme



de Hele-Shaw (2.34), mais c'est insuffisant pour traiter les termes de courbure moyenne (on a besoin que  $\Sigma$  soit  $C^2$  au voisinage des "points de contact").

Pour ces deux raisons, nous avons dû établir un résultat qui, d'une part, adapte l'interposition d'Ilmanen au cas de tubes réguliers de classe  $C^{1,1}$  et, d'autre part, permet une approximation par des tubes  $C^2$ . Il se trouve que ce résultat est en quelque sorte une version non-locale géométrique du Lemme matriciel de Ishii [CIL92, Theorem 8.3] qui est un outil fondamental dans la théorie des solutions de viscosité du second ordre. Nous l'avons donc énoncé et prouvé en toute généralité pour des applications futures.

**Théorème 2.20.** [10, Theorem 2] *Soit  $\mathcal{K}^1$  et  $\mathcal{K}^2$  deux tubes réguliers tels que  $\mathcal{K}^1 \subset\subset \mathcal{K}^2$ . Supposons que*

$$\text{dist}(\mathcal{K}^1, \widehat{\mathcal{K}^2}) = |(y_1, s_1) - (y_2, s_2)| > 0 \quad \text{avec } (y_1, s_1) \in \overline{\mathcal{K}^1}, (y_2, s_2) \in \widehat{\mathcal{K}^2}, s_1, s_2 > 0$$

et

$$(2.35) \quad y_1 \neq y_2.$$

Alors

- (i) (Interposition) Il existe un tube  $\Sigma$  régulier de classe  $C^{1,1}$  tel que pour un certain point  $(\bar{y}, \bar{s})$  de son bord,  $\Sigma^1 := \Sigma + (y_1 - \bar{y}, s_1 - \bar{s})$  soit tangent extérieurement à  $\mathcal{K}^1$  en  $(y_1, s_1)$  et  $\Sigma^2 := \Sigma + (y_2 - \bar{y}, s_2 - \bar{s})$  soit tangent intérieurement à  $\mathcal{K}^1$  en  $(y_2, s_2)$ .
- (ii) (Approximation simultanée par des tubes  $C^2$ ) Pour tout  $\varrho > 0$ , il existe des suites  $(\Sigma^{1,n})$  et  $(\Sigma^{2,n})$  de tubes réguliers de classe  $C^{1,1}$  qui convergent respectivement vers  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  (au sens  $C^{1,\alpha}$  pour tout  $\alpha < 1$ ), des suites de points  $(y_{1,n}, s_{1,n})$  et  $(y_{2,n}, s_{2,n})$  qui convergent respectivement vers  $(y_1, s_1)$  et  $(y_2, s_2)$  et deux matrices symétriques  $X_1, X_2$  de taille  $N - 1$  qui vérifient :

- (1)  $\Sigma^{1,n}$  est tangent extérieurement à  $\mathcal{K}^1$  en  $(y_{1,n}, s_{1,n})$  et  $\Sigma^{2,n}$  est tangent intérieurement à  $\mathcal{K}^2$  en  $(y_{2,n}, s_{2,n})$ .
- (2) Pour  $i = 1, 2$ ,  $\Sigma^{i,n}$  est de classe  $C^2$  dans un voisinage de  $(y_{i,n}, s_{i,n})$ , la courbure moyenne  $H_{\Sigma_{s_{i,n}}^{i,n}}(y_{i,n})$  converge vers  $X_i$  et

$$(2.36) \quad -\frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & -X_2 \end{pmatrix} \leq \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

En fait, il est inutile de supposer (2.35) qui est une conséquence de la régularité des tubes  $\mathcal{K}^1$  et  $\mathcal{K}^2$ . Cela se traduit sur la Figure 9 par le fait que le segment  $[(s_1, y_1), (s_2, y_2)]$  n'est pas horizontal. La formule (2.36) permet d'exprimer de manière non-lisse des conditions du second-ordre exactement comme dans le lemme matriciel d'Ishii où une inégalité similaire permet d'exprimer l'inégalité " $D^2u^1 \leq D^2u^2$ " en un point de maximum de  $u^1 - u^2$  pour des fonctions  $u^1, u^2$  non lisses. Ici (2.36) sert à exprimer rigoureusement que " $H_{\widehat{\mathcal{K}^1}_{s_1}}(y_1) \leq H_{\mathcal{K}^2_{s_2}}(y_2)$ ". Pour simplifier l'exposé et éviter des passages à la limite, supposons que  $\Sigma^i$  est  $C^2$  dans un voisinage de  $(y_i, s_i)$ . Le Théorème précédent nous donne alors deux tubes réguliers d'interposition qui vérifient

$$(2.37) \quad H_{\Sigma_{s_1}^1}(y_1) \leq H_{\Sigma_{s_2}^2}(y_2).$$

Pour continuer, nous avons besoin d'une estimation sur les termes de Hele-Shaw qui est prouvée dans [CR06] : pour tout  $\rho > 0$  petit, il existe une constante  $\mu > 0$  telle que, pour tout ensemble  $\Omega$  de bord  $C^{1,1}$  et tout vecteur de translation  $p$ , on ait

$$h_2(x + p, \Omega + p) = |Dv^{\Omega+p}(x + p)|^2 \leq (1 + \mu|p|)h_2(x, \Omega) = (1 + \mu|p|)|Dv^\Omega(x)|^2$$

dès que  $\partial\Omega$  est à distance au moins  $\rho$  de la source et  $\Omega$  est dans une grosse boule de rayon  $1/\rho$ . Dans la formule ci-dessus,  $v^\Omega$  désigne la solution de (1.19) dans  $\Omega$ . En appliquant ce résultat dans notre cas, on obtient

$$(2.38) \quad |Dv^{\Sigma_{s_1}^1}(y_1)|^2 \leq (1 + \mu|y_1 - y_2|)|Dv^{\Sigma_{s_2}^2}(y_2)|^2 \leq (1 + \mu\varepsilon)|Dv^{\Sigma_{s_2}^2}(y_2)|^2$$

car  $|y_1 - y_2| \leq \varepsilon$ .

Nous avons maintenant tous les éléments pour conclure. On écrit que  $\widetilde{\mathcal{K}}^1$  est une sous-solution en utilisant  $\Sigma^1$  comme tube test tangent extérieurement :

$$\mathcal{V}_{\Sigma_{s_1}^1}(y_1) \leq h_{\lambda_1}(y_1, \Sigma_{s_1}^1) = H_{\Sigma_{s_1}^1}(y_1) + \lambda_1|Dv^{\Sigma_{s_1}^1}(y_1)|^2$$

et que  $\widehat{\mathcal{K}}^2$  est une sur-solution en utilisant  $\Sigma^2$  comme tube test tangent intérieurement :

$$\mathcal{V}_{\Sigma_{s_2}^2}(y_2) \geq h_{\lambda_2}(y_2, \Sigma_{s_2}^2) = H_{\Sigma_{s_2}^2}(y_2) + \lambda_2|Dv^{\Sigma_{s_2}^2}(y_2)|^2$$

Comme  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont égaux à une translation près, on a l'égalité des vitesses  $\mathcal{V}_{\Sigma_{s_1}^1}(y_1) = \mathcal{V}_{\Sigma_{s_2}^2}(y_2)$  ce qui donne, en utilisant (2.37) et (2.38),

$$\begin{aligned} H_{\Sigma_{s_2}^2}(y_2) + \lambda_2|Dv^{\Sigma_{s_2}^2}(y_2)|^2 &\leq H_{\Sigma_{s_1}^1}(y_1) + \lambda_1|Dv^{\Sigma_{s_1}^1}(y_1)|^2 \\ &\leq H_{\Sigma_{s_2}^2}(y_2) + \lambda_1(1 + \mu\varepsilon)|Dv^{\Sigma_{s_2}^2}(y_2)|^2. \end{aligned}$$

En prenant  $\varepsilon > 0$  assez petit, comme  $\lambda_1 < \lambda_2$ , on obtient la contradiction espérée qui termine la preuve.

**2.4.4. Convergence vers l'équilibre.** Comme expliqué dans l'introduction, la motivation de l'étude du problème d'évolution (2.33) est d'approcher, quand  $t \rightarrow +\infty$ , une solution de (1.25) ou (1.27). Nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 2.21.** [10, Theorem 4, Corollary 1] (*convergence du flot* (2.33)) *Supposons que la source  $S$  (définie à la suite de (1.17)) soit strictement étoilée. Soit  $\lambda > 0$  et  $\mathcal{K}$  une solution de (2.33) avec  $h_\lambda$  de la forme (1.20) ou (1.28). Alors  $\mathcal{K}(t)$  converge, pour la distance de Hausdorff, vers l'unique solution  $\mathcal{K}_\infty$  de du problème de Bernoulli extérieur généralisé*

$$(2.39) \quad \text{Trouver } K \subset \subset \mathbb{R}^N \text{ tel que } S \subset \subset K \text{ et } h_\lambda(x, K) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial K.$$

Pour être complet, nous devons expliciter la notion de solution pour (2.39) puisque  $\mathcal{K}_\infty$  n'est pas régulier en général. Nous dirons que  $K$  est une solution de (2.39) si le tube (constant en temps)  $\cup_{t \geq 0} K \times \{t\}$  est une solution du problème d'évolution (2.33) (au sens de la Définition 2.16). Il y a plusieurs notions de solutions faibles pour de tels problèmes de frontières libres, nous renvoyons le lecteur au papier de Flucher et Rumpf [FR97]. La définition que nous donnons ici est la plus commode dans notre cadre (voir Beurling [Beu58] pour une définition semblable). Nous prouvons l'existence de solutions ([10, Proposition 7]) et l'hypothèse sur le caractère étoilé de la source nous permet de

prouver l'unicité de la solution de (2.39) (dans le cas particulier de (1.22), ce résultat était déjà connu, voir Tepper [Tep75]). La convergence est ensuite prouvée en adaptant la méthode des semi-limites relaxées (introduite par Barles et Perthame [BP87, BP88, Bar94] dans le contexte des solutions de viscosité).

**2.4.5. Décroissance de l'énergie le long de l'évolution.** Une solution de (2.39) est un point critique de (1.25) ou (1.27). Cela justifie l'approche numérique utilisée par Allaire, Jouve et Toader [AJT02, AJT04] (voir également les références données dans ces articles) qui ont construit des flots de gradient discrets pour résoudre les problèmes d'optimisation de forme (dont (1.17) ou (1.26) sont des cas particuliers).

Dans le cas particulier du problème (1.17) et du flot (1.20), nous pouvons préciser le résultat de convergence du Théorème (2.21) en prouvant

**Théorème 2.22.** [11, Theorem 6.1] *Soit  $\lambda > 0$  et  $\Omega_0$  tel que  $\mathcal{L}^N(\partial\Omega_0) = 0$ . Si le problème d'évolution (1.20) a une unique solution  $\mathcal{K}$ , alors*

$$t \in [0, +\infty) \mapsto E_\lambda(\overline{\mathcal{K}}_t) \text{ est décroissant.}$$

Démarrer d'un ensemble initial dont le bord est de mesure nulle est une condition nécessaire pour espérer de l'unicité. L'unicité du flot signifie que  $\mathcal{L}^N(\mathcal{K}^+ \setminus \mathcal{K}^-) = 0$  où  $\mathcal{K}^+$  et  $\mathcal{K}^-$  sont respectivement la plus grande et la plus petite solution données par la Proposition 2.18 (elles ne sont pas égales en général, la plus grande étant un ensemble fermé alors que la plus petite est ouverte). L'hypothèse d'unicité n'est pas trop restrictive du fait de l'unicité générique pour le problème d'évolution.

Comme expliqué dans l'introduction, le calcul de l'énergie  $E_\lambda(\overline{\mathcal{K}}_t)$  n'est pas immédiat quand  $\mathcal{K}$  est une solution de viscosité car cette notion de solution n'est pas définie à partir de l'énergie associée au flot (1.20). Même dans le cas bien connu de l'évolution par courbure moyenne, démontrer que le périmètre est décroissant pour les solutions de viscosité n'est pas chose facile. Cela a été prouvé par Evans et Spruck [ES91, ES92] par des techniques de régularisation et par Chambolle [Cha04] en utilisant les mouvements minimisants (voir Almgren, Taylor et Wang [ATW93], Ambrosio [Amb95] et Ambrosio, Gigli et Savaré [AGS08]). C'est cette dernière approche que nous utilisons en construisant un flot de gradient discret  $(\Omega_n^h)$  pour  $E_\lambda$ . L'ensemble  $\Omega_{n+1}^h$  est obtenu en minimisant une fonctionnelle  $J_h(\Omega_n^h, \cdot)$  qui est égale à l'énergie plus un terme de pénalisation (en  $1/h$ ) empêchant  $\Omega_{n+1}^h$  d'être trop loin de  $\Omega_n^h$ . Suivant les idées de [Cha04] nous prouvons que les limites de ces flots discrets convergent vers nos solutions de viscosité géométriques quand  $h \rightarrow 0$ . La preuve s'appuie de façon cruciale sur des propriétés fines des minimiseurs de  $J_h(\Omega_n^h, \cdot)$  obtenues par Alt et Caffarelli [AC81]. Comme l'énergie discrète est décroissante, le résultat suit.

**2.4.6. Commentaires et perspectives.** Concernant l'optimisation de forme, nous renvoyons à [All02, All07, HP05] pour des détails. Lorsqu'on démarre d'un ensemble  $\Omega_0$  lisse, Escher et Simonett [ES97] ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution lisse pour (2.33) pour des temps petits. Pour obtenir l'existence en temps grand, nous avons utilisé les solutions de viscosité géométriques mais il est possible d'utiliser l'approche par lignes de niveaux : voir Kim [Kim05] où un problème de Stefan est traité. Les mouvements minimisants ont été récemment utilisés par Forcadel et Monteillet [FM07] pour construire des solutions

faibles à des problèmes d'évolution dont la vitesse est de type dislocation plus un terme de courbure moyenne.

Par la suite, avec Pierre Cardaliaguet et Marc Dambrine, nous aimerions poursuivre les travaux ci-dessus en prouvant la convergence (au moins pour des sous-suites) du Théorème 2.21 même dans des cas plus généraux où on n'a pas unicité pour le problème limite. Dans ce cas, les techniques utilisées ne fonctionnent plus (car l'approche par semi-limites relaxées repose sur la comparaison pour le problème limite).

Enfin, la notion de solutions décrite dans le § 2.4.1 peut être utilisée dans de nombreux autres problèmes non-locaux et devrait amener des résultats nouveaux. Nous avons des ébauches de résultats dans des problèmes apparaissant en combustion (voir Caffarelli et Vazquez [CV95]) et j'aimerais regarder des problèmes faisant intervenir la courbure gaussienne (modèles d'érosion de galets, voir par exemple Ishii et Mikami [IM01, IM04b, IM04a] et leurs références).

### 3. ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

**3.1. Unicité pour des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman reliées à des problèmes de contrôle stochastique non-bornés.** Je vais décrire les travaux [9, 19], écrits avec Francesca Da Lio, à travers les cas des EDP (1.29) avec (1.30)-(1.31) et (1.29) avec (1.37)-(1.38).

Dans ces deux cas, le résultat principal est un principe de comparaison pour les solutions de viscosité avec certaines croissances que nous introduisons maintenant. Nous dirons qu'une fonction  $u : \mathbb{R}^N \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est dans la classe quadratique  $\mathcal{Q}$  s'il existe une constante  $C$  telle que

$$(3.1) \quad |u(x, t)| \leq C(1 + |x|^2) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ uniformément pour } t \in [0, T],$$

et dans la classe sous-quadratique  $\mathcal{SQ}$  si

$$(3.2) \quad \frac{|u(x, t)|}{1 + |x|^2} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{uniformément pour } t \in [0, T].$$

Passons aux hypothèses sur les données. Je ne traite pas le cas le plus général, préférant renvoyer le lecteur aux articles (voir [9, (A1)–(A3)] et [19, (A), (B), (C)]).

Dans le cas (1.29) avec (1.30)-(1.31), on suppose que l'ensemble de contrôle non-borné est  $A$  et  $B$  est compact. Le traitement de  $G$  ne pose donc pas de difficulté particulière et je prends ici  $G = 0$ . De même, supprimons la dépendance en temps des données. L'EDP (1.29) s'écrit alors

$$(3.3) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + \sup_{\alpha \in A} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Trace} [\sigma(x, \alpha) \sigma^T(x, \alpha) D^2 u] - \langle b(x, \alpha), Du \rangle - \ell(x, \alpha) \right\} = 0$$

dans  $\mathbb{R}^N \times (0, T)$  avec la condition terminale  $u(x, T) = \psi(x)$ . On supposera que les données sont continues et qu'il existe  $\nu, C > 0$  tels que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^N$ ,  $\alpha \in A$ ,

- (i)  $|b(x, \alpha)| \leq C(1 + |x| + |\alpha|)$  et  $|b(x, \alpha) - b(y, \alpha)| \leq C(1 + |\alpha|)|x - y|$ ,  
(ii)  $\nu|\alpha|^2 - C(1 + |x|^2) \leq \ell(x, \alpha) \leq C(1 + |x|^2 + |\alpha|^2)$  (coût coercif en  $\alpha$ ),  
(3.4) (iii)  $\sigma$  est localement lipschitzien et satisfait l'une des deux conditions suivantes :  
 $|\sigma(x, \alpha)| \leq C(1 + |x|)$  (diffusion bornée par rapport au contrôle)  
 $|\sigma(x, \alpha)| \leq C(1 + |x| + |\alpha|)$  (diffusion non-bornée par rapport au contrôle).

Dans le cas (1.29) avec (1.37)-(1.38), l'équation devient

$$(3.5) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \text{Trace} [\sigma(x) \sigma^T(x) D^2 u] - \langle b(x), Du \rangle + f(x, u, \sigma(x) Du) = 0.$$

On suppose que la dérive  $b$  et la diffusion  $\sigma$  satisfont les mêmes hypothèses (3.4) (i) et (iii) (sans le contrôle) et que  $f$  vérifie : il existe  $C > 0$  tels que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^N$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}^N$

- (i)  $|f(x, u, p)| \leq C(1 + |x|^2 + |u| + |p|^2)$  (croissance quadratique),  
(ii)  $|f(x, u, p) - f(y, u, p)| \leq C(1 + |u| + |p|)|x - y|$ ,  
(3.6) (iii)  $p \mapsto f(x, u, p)$  est convexe,  
(iv)  $\sigma$  est borné,  
(v)  $|f(x, u, p) - f(x, v, p)| \leq C|u - v|$ .

Nous pouvons maintenant énoncer nos résultats :

**Théorème 3.1.** *Dans ce théorème  $u$  désigne une sous-solution de viscosité de l'EDP (qui sera précisée) et  $v$  une sur-solution qui sont ordonnées au temps final, c'est-à-dire  $u(x, T) \leq \psi(x) \leq v(x, T)$ . Alors, nous avons comparaison,*

$$u(x, t) \leq v(x, t) \quad \text{pour tout temps } t \in [0, T]$$

dans les cas suivants :

- (1) [9, Theorem 2.1] Pour (3.3) sous l'hypothèse (3.4) avec une diffusion bornée par rapport au contrôle si  $u, v, \psi$  sont dans  $\mathcal{Q}$ .
- (2) [19, Theorem 2.1] Pour (3.3) sous l'hypothèse (3.4) avec une diffusion à croissance linéaire par rapport au contrôle si  $u, v, \psi$  sont dans  $\mathcal{SQ}$ .
- (3) [19, Theorem 3.1] Pour (3.5) sous l'hypothèse (3.6) si  $u, v, \psi$  sont dans  $\mathcal{Q}$ .

La preuve de [19, Theorem 2.1] nécessite une adaptation de la définition de la sur-solution de viscosité pour éviter les cas où l'hamiltonien est infini. À l'exception de la régularité (3.6) (ii) de  $f$  en  $x$  que nous avons dû introduire dans [19, Theorem 3.1], nous prouvons la comparaison sous des hypothèses identiques à celles utilisées par Briand et Hu [BH08] pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution à l'EDSR associée à (3.5) et obtenir la formule de Feynman-Kac correspondante. Cela donne donc une correspondance complète entre l'EDSR et l'EDP.

Les preuves de ces résultats sont similaires et susceptibles de généralisations à d'autres problèmes. Elles reposent sur des techniques approfondies de solutions de viscosité. Je me bornerai ici à en donner les grandes lignes. On commence par écrire l'équation satisfaite

par  $\mu u$  ou  $\mu$  est un paramètre fixé proche de 1. L'intérêt de ce paramètre  $\mu$  est, qu'en écrivant les inégalités de viscosité satisfaites par la sous-solution  $\mu u$  et la sur-solution  $v$ , on crée une dyssymétrie entre les non-linéarités. Cela permet d'utiliser de façon cruciale la convexité pour démontrer que  $\mu u - v$  est sous-solution de viscosité d'une nouvelle équation "linéarisée" (ou plutôt "extrémale"). Ensuite on construit une sur-solution lisse  $\Phi_R$  nulle sur toute boule  $B(0, R)$  et à croissance quadratique de cette nouvelle équation; l'originalité de cette sur-solution, qui apparaît déjà dans Barles, Burdeau, Romano et Samsoen [BBRS95], est qu'elle est non-explicite et elle-même solution d'une équation parabolique de type chaleur. On obtient alors facilement  $\mu u - v \leq \Phi_R$  et on conclut en passant aux limites  $R \rightarrow +\infty$  et  $\mu \rightarrow 1$ .

Enfin, dans [9, Theorem 3.1], sous les hypothèses (3.4) (avec  $\sigma$  borné par rapport au contrôle), nous prouvons que la fonction valeur

$$V(x, t) = \mathbb{E}_{tx} \left\{ \int_t^T \ell(X_s, \alpha_s) ds + \psi(X_T) \right\}$$

du problème de contrôle stochastique gouverné par

$$(3.7) \quad \begin{cases} dX_s = b(X_s, \alpha_s)ds + \sigma(X_s, \alpha_s)dW_s, & s \in (t, T), \quad 0 \leq t \leq T, \\ X_t = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

est l'unique solution de viscosité de (3.3) dans  $\mathcal{Q}$ . En général, pour prouver ce type de résultat, on montre que la fonction valeur est solution de viscosité de l'EDP à l'aide du principe de la programmation dynamique. Dans ce contexte non borné, cette stratégie est délicate et nous avons comparé directement  $V$  avec l'unique solution de viscosité de (3.3).

**3.2. Homogénéisation de systèmes monotones d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre.** Le travail [15] écrit en collaboration avec Fabio Camilli et Paola Loreti est somme toute assez naturel et les techniques que nous avons mis bout à bout sont, depuis les célèbres travaux [LPV86, Eva89], bien connues. Nous renvoyons le lecteur au papier de Alvarez et Bardi [AB03] pour une vue d'ensemble des problèmes d'homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi dans le cas périodique.

Notre contribution a consisté à adapter ces méthodes au cas du système (1.39). Les systèmes monotones d'équations de Hamilton-Jacobi ont déjà été étudiés par Engler et Lenhart [EL91], Ishii et Koike [IK91a, IK91b, Ish92] et Camilli et Loreti [CL08] dans des cas stationnaires avec des hypothèses de monotonie semblables à la nôtre qui peut s'exprimer par :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} &\text{si } r, s \in \mathbb{R}^M \text{ et } r_j - s_j = \max_{k=1, \dots, M} \{r_k - s_k\} \geq 0, \text{ alors} \\ &\text{pour tout } x, y, p \in \mathbb{R}^N, \quad H_j(x, y, r, p) - H_j(x, y, s, p) \geq 0. \end{aligned}$$

Comme les résultats que nous prouvons sont de facture assez classique, je n'en dirai pas plus et je renvoie à [15] pour les détails.

**3.3. Références, commentaires et perspectives.** Il existait déjà de nombreux travaux sur les solutions de viscosité pour des EDP du type (3.3) et les problèmes de contrôle optimal non-bornés. Dans le cas déterministe (équations d'ordre 1), citons les travaux de Alvarez [Alv97], Barles [Bar90], Bardi et Da Lio [BDL97], Cannarsa et Da Prato [CDP89], Rampazzo et Sartori [RS00] et les livres [Bar94, BCD97]. Dans le cadre stochastique,

les cas classiques sont traités dans Fleming et Rishel [FR75], Krylov [Kry80], Bensoussan [Ben82], Lions [Lio82, Lio83a, Lio83b], Fleming et Soner [FS93], Yong et Zhou [YZ99]. Les travaux qui se rapprochent le plus des nôtres sont ceux de Alvarez [Alv96] en horizon infini, Ishii [Ish97] pour l'ordre 1 (dont nous nous sommes beaucoup inspiré) et les travaux déjà cités de Kobylanski [Kob00] et Krylov [Kry01].

Les EDP du type (1.29) avec (1.30)-(1.31) ont des applications dans divers domaines : voir par exemple Iourtschenko [Iou00] (en mécanique pour des systèmes à 1 degré de liberté soumis à des excitations aléatoires) et Benth et Karlsen [BK05] (en mathématiques financières) où nos résultats sont utilisés. Pour les mathématiques financières, voir aussi Pham [Pha02] et pour une introduction générale, les livres de Øksendal [Øks98] et Lamberton et Lapeyre [LL97]. Enfin, (1.29) peut être reliée à des problèmes de contrôle risque-sensitif qui peuvent être vus comme des jeux différentiels (voir les travaux de Fleming et MacEneaney [FM92, McE95a, McE95b, McE98] et Nagai [Nag96]). Dans ce contexte, [9] améliore les résultats de Da Lio et MacEneaney [DLM02].

Pour une présentation aux EDSR, nous renvoyons aux références classiques Pardoux et Peng [PP90, PP92] et au livre [EKM97]. Notre résultat [19, Theorem 2.1] correspond de façon satisfaisante à celui obtenu par Briand et Hu [BH08] pour la partie EDSR. Nous sommes encore loin de la généralité obtenue par Kobylanski [Kob00, Theorem 3.2] dans le cas des solutions bornées (sa preuve repose sur un changement de variable de type Hopf-Cole qui est inapplicable pour les solutions non-bornées). Nous espérons pouvoir améliorer nos résultats.

Une autre suite à donner à nos travaux concerne le cas de (3.5) lorsque  $f$  est quadratique par rapport au gradient sans être convexe. Ce problème a déjà été abordé dans des cas “simples” dans [9, Section 4] pour

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + h(x)|Du|^2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T]$$

avec  $h$  qui peut changer de signe et  $u$  quadratique. Avec Francesca Da Lio, nous avons déjà obtenu de nouveaux résultats (travail en cours).

Avec Shigeaki Koike, nous travaillons sur le même type de problèmes que ceux présentés ci-dessus mais dans le cas stationnaire, typiquement pour des EDP elliptiques du type

$$u - \text{Trace}(\sigma(x)\sigma^T(x)D^2u) + \langle b(x), Du \rangle + \langle c(x)Du, Du \rangle = f(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

où  $f$  et la solution  $u$  sont dans  $\mathcal{SQ}$  et  $c$  est une matrice qui n'est ni définie positive, ni définie négative. Nous avons déjà quelques résultats.

Enfin, dans le cadre de l'ANR KAM faible, nous comptons, avec Fabio Camilli et Paola Loreti, poursuivre l'étude des systèmes monotones d'équations de Hamilton-Jacobi en nous intéressant à leur comportement asymptotique. Suivant les paramètres de couplage, nous pensons que des phénomènes intéressants peuvent apparaître.

#### 4. INÉGALITÉ DE KURDYKA-ŁOJASIEWICZ, TRAJECTOIRES DE GRADIENT ET FONCTIONS CONVEXES

**4.1. Caractérisation de l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz à l'aide des trajectoires de gradient.** Le travail [18], en collaboration avec Jérôme Bolte, Aris Daniilidis et

Laurent Mazet, s'inscrit dans une étude entreprise par les deux premiers auteurs, Lewis et Shiota [BDL06b, BDL06a, BDLS07] de l'inégalité de Łojasiewicz (et de sa généralisation proposée par Kurdyka) pour une fonction non nécessairement analytique, voire non-différentiable. Nous donnons des caractérisations de l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz à l'aide des propriétés des trajectoires de gradient de la fonction et étudions en particulier le cas des fonctions convexes.

Notre papier [18] est écrit dans un cadre non-lisse, essentiellement celui des fonctions semi-convexes (voir (2.25) pour la définition et Albano et Cannarsa [AC99] pour le cas de la dimension infinie). Comme il apporte des résultats nouveaux même dans le cadre de fonctions plus régulières, pour simplifier au maximum l'exposé, je m'efforcerai d'énoncer les résultats principaux dans le cadre lisse.

Kurdyka a remarqué ([Kur98]) qu'on pouvait généraliser l'inégalité de Łojasiewicz (1.41) pour traiter des fonctions non-analytiques. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons. Dans toute la suite, supposons, pour simplifier, que  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  ( $H$  est un espace de Hilbert) est une fonction  $C^1$  positive telle que  $f(0) = 0$  (0 est un point critique et un minimum). Nous dirons qu'une telle fonction  $f$  satisfait l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz s'il existe  $r_0 > 0$  et  $\varphi \in KL(0, r_0)$  tel que

$$(4.1) \quad \|\nabla(\varphi \circ f)(x)\| \geq 1 \quad \text{pour tout } x \in \{0 < f \leq r_0\},$$

où

$$KL(0, r_0) = \{\varphi : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ continue, } \varphi(0) = 0, \varphi \in C^1(0, r_0), \varphi' > 0\}.$$

L'inégalité de Łojasiewicz est le cas particulier où l'on peut prendre  $\varphi(r) = \frac{1}{C(1-\theta)} r^{1-\theta}$ .

Notre principal résultat est de décrire très précisément le lien entre l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz et les trajectoires de gradient de  $f$ ,

$$(4.2) \quad \dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)), \quad t > 0, \quad \gamma(0) = x_0.$$

Pour l'énoncer, nous avons besoin de la notion de trajectoires par morceaux. Une courbe

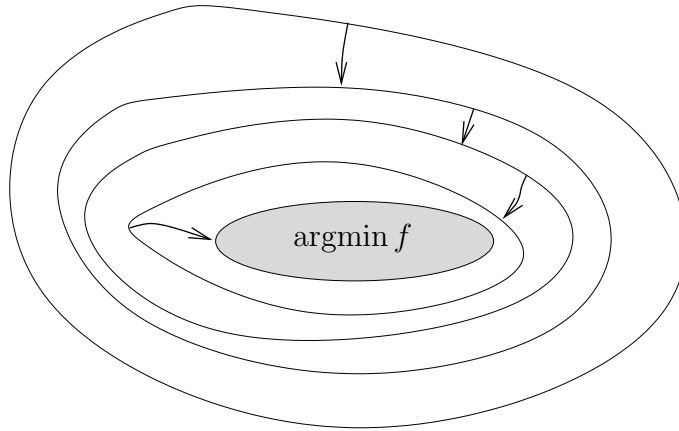


FIG. 11

$\gamma : [0, T) \rightarrow H$  ( $T$  peut être égal à  $+\infty$ ) est une trajectoire par morceaux s'il existe une



partition dénombrable de  $[0, T)$  en intervalles  $I_k$  telle que chaque restriction  $\gamma|_{I_k}$  est  $C^1$ . Une courbe  $\gamma : [0, T) \rightarrow H$  est une trajectoire de gradient par morceaux de  $f$  si  $\gamma$  est une trajectoire par morceaux et de plus  $\gamma|_{I_k}$  satisfait (4.2) et les intervalles  $f(\gamma|_{I_k})$  et  $f(\gamma|_{I_l})$  ont au plus un point en commun pour  $k \neq l$  (voir Figure 11 pour une trajectoire en 4 morceaux entre des lignes de niveaux de  $f$ ). Enfin nous définissons la longueur d'une trajectoire par morceaux par

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

**Théorème 4.1.** [18, Theorem 18] *Soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  positive avec  $f(0) = 0$ . Supposons que 0 soit une valeur critique isolée dans  $[0, \bar{r}]$  pour un certain  $\bar{r} > 0$  et que l'ensemble  $\{f \leq \bar{r}\}$  est compact (pour la topologie forte). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) [**Inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz**] *Il existe  $r_0 \in (0, \bar{r})$  et  $\varphi \in KL(0, r_0)$  tels que (4.1) soit vraie.*

(ii) [**Longueur finie des trajectoires de gradient**] *Il existe  $r_0 \in (0, \bar{r})$  et une fonction continue strictement croissante  $\sigma : [0, r_0] \rightarrow [0, +\infty)$  avec  $\sigma(0) = 0$  tels que toute trajectoire de gradient  $\gamma([0, T)) \subset \{f \leq \bar{r}\}$  satisfasse*

$$\int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \sigma(f(x)) - \sigma(f(\gamma(T))).$$

(iii) [**Longueur finie des trajectoires de gradient par morceaux**] *Il existe  $r_0 \in (0, \bar{r})$  et une constante  $M$  telle que toute trajectoire de gradient par morceaux  $\gamma([0, T)) \subset \{f \leq \bar{r}\}$  satisfasse*

$$\text{long}(\gamma) \leq M.$$

(iv) [**Talwegs de longueur finie**] *Pour tout  $R > 1$ , il existe  $r_0 \in (0, \bar{r})$ , un ensemble fermé  $D$  contenant  $\{0 < f \leq \bar{r}\}$  et une trajectoire par morceaux  $\gamma : (0, r_0) \rightarrow H$  de longueur finie qui est une sélection dans le talweg  $\mathcal{V}_R$ , c'est-à-dire, pour tout  $0 < r \leq r_0$ ,*

$$\gamma(r) \in \mathcal{V}_R(r) := \left\{ x \in \{f = r\} \cap D : \|\nabla f(x)\| \leq R \inf_{y \in \{f=r\} \cap D} \|\nabla f(y)\| \right\}.$$

(v) [**Condition d'intégrabilité**] *Il existe  $r_0 \in (0, \bar{r})$  tel que la fonction*

$$u(r) = \frac{1}{\inf_{x \in \{f=r\}} \|\nabla f(x)\|}, \quad r \in (0, r_0]$$

*soit finie et appartienne à  $L^1(0, r_0)$ .*

(vi) [**Régularité métrique**] *Il existe  $r_0 \in (0, \bar{r})$  et  $\varphi \in KL(0, r_0)$  tels que pour tous  $0 < r_1, r_2 \leq r_0$ ,*

$$d_{\mathcal{H}}(\{f \leq r_1\}, \{f \leq r_2\}) \leq |\varphi(r_1) - \varphi(r_2)|,$$

*où  $d_{\mathcal{H}}$  est la distance de Hausdorff.*

Le talweg est un terme utilisé en géologie. De manière imagée, c'est le lieu où se forment les lits des rivières (qui coulent selon la ligne de plus grande pente mais là où la pente est la plus faible pour une ligne de niveau donnée). La condition d'intégrabilité (v) est peut-être celle à laquelle on aboutit le plus naturellement lorsqu'on exprime les conditions que doit

satisfaire  $\varphi$  pour que (4.1) soit vérifiée. Enfin, il est important de noter, que malgré notre intuition de départ, il faut plus que la longueur finie des trajectoires de gradient pour assurer l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz ((ii) et (iii)). La propriété (vi) est reliée aux propriétés de régularité métriques de  $f$  qui ont une grande importance en optimisation ([AC04, Iof00, DQZ06]) et dont nous ne donnons qu'une définition "intuitive". Si une fonction  $f$  est lispchitzienne, on peut estimer précisément  $|f(x) - f(y)|$  en fonction de  $|x - y|$ . La régularité métrique est, en un sens, l'inverse de cette propriété; sachant que  $f(x)$  est proche de  $f(y)$ , on arrive à en déduire que les ensembles de niveaux  $f^{-1}(x)$  et  $f^{-1}(y)$  sont proches (au sens de la distance de Hausdorff). Bien évidemment, une telle propriété, qui est fausse en général, est garantie par des bornes inférieures de gradient et nous prouvons que (4.1) joue ce rôle. Notons enfin que l'hypothèse de compacité des sous-niveaux de  $f$  n'est pas vide en dimension infinie; elle est satisfaite par exemple pour des fonctionnelles du type

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} g(u), \quad u \in H^1(\Omega),$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné,  $g$  une fonction semiconvexe (voir (2.25) pour une définition), qui ont une grande importance dans l'application de l'inégalité de Łojasiewicz en EDP.

Comme applications de ce théorème, nous pouvons citer par exemple des résultats de convergence pour l'algorithme proximal [18, Theorem 24]. Nous étudions aussi plus particulièrement le cas des fonctions convexes pour lesquels, les conclusions du Théorème 4.1 peuvent être renforcées. Nous donnons une condition de croissance sous laquelle une fonction convexe satisfait l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz [18, Theorem 30] : s'il existe une fonction continue strictement croissante  $m : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  telle que  $m(0) = 0$ ,  $f \geq m(\text{dist}(\cdot, \text{argmin } f))$  et

$$(4.3) \quad \int_0^\rho \frac{m^{-1}(r)}{r} dr < +\infty \quad (\text{pour un } \rho > 0),$$

alors  $f$  satisfait (4.1) avec

$$\varphi(r) = \int_0^r \frac{m^{-1}(s)}{s} ds.$$

Ce résultat englobe des fonctions avec certaines "croissances non-analytiques". Par exemple  $m(r) = \exp(-1/\sqrt{r})$  satisfait (4.3).

Mais le résultat le plus important que nous obtenons dans le cas convexe est un contre-exemple [18, Lemma 35, Theorem 36] à (4.1). La construction est loin d'être triviale. En premier lieu, nous fabriquons une famille dénombrable  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de convexes compacts emboîtés du plan (dont les bords sont disjoints deux à deux) qui vérifient

$$(4.4) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} d_{\mathcal{H}}(\partial C_k, \partial C_{k+1}) = +\infty$$

(ce qui est déjà en soi une propriété suprenante et inattendue!). Ensuite nous utilisons un théorème dû à Torralba [Tor96] qui permet de construire une fonction convexe continue dont les  $\partial C_k$  sont des lignes de niveaux. La propriété (4.4) permet alors de trouver une trajectoire de gradient par morceaux de longueur infinie (ce qui permet de conclure par le Théorème 4.1). Enfin, dans le but de prouver que ce n'est pas le défaut de régularité

de  $f$  (qui est seulement continue) qui permet de telles pathologies, nous montrons, ce qui n'est pas évident techniquement, qu'il est possible de lisser la fonction (pour la rendre  $C^m$  pour tout  $m \geq 1$ ) sans trop modifier la trajectoire de gradient par morceaux.

**4.2. Longueur des trajectoires de gradient d'une fonction quasiconvexe dans le plan.** L'origine des questions que nous traitons dans [20] avec Aris Daniilidis et Stéphane Sabourau provient du travail [18] décrit précédemment. Elles me paraissent cependant très naturelles et il est amusant de remarquer qu'elles peuvent s'énoncer de manière vulgarisée.

Imaginons un randonneur qui se trouve dans une vallée fermée (on peut imaginer un cratère de volcan ou un cirque) et qui veut atteindre un refuge dans le fond de la vallée. Malheureusement, un épais brouillard couvre toute la zone. Ayant regardé une carte avant de partir, il sait que la topographie de la vallée est assez régulière, a une vague idée de l'altitude où il se trouve (disons 500 m au-dessus du fond de la vallée) et de l'étendue de cette vallée (sur la carte, elle est incluse dans un disque de 5 km de diamètre). Enfin, il a remarqué qu'il n'y a pas de zone de plat hormis au fond où se trouve le refuge et que les lignes de niveaux sont toutes convexes (en cas de pluies diluviennes qui viendraient à noyer toute la vallée, il ne se formerait qu'un seul lac au cours du remplissage). Perdu comme il est dans le brouillard, la seule stratégie qui s'offre à lui pour atteindre le refuge est de suivre la ligne de plus grande pente qui le conduira au fond de la vallée.

Avec ces données, peut-il estimer la distance qu'il aura à marcher pour arriver à son but ?

Nous avons démontré le théorème suivant qui permet de répondre à la question.

**Théorème 4.2.** [20, Theorem 1.1, Corollary 6.3] *Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^{1,1}$  quasiconvexe coercive. Alors la trajectoire de gradient (4.2) est bornée, converge vers un minimum  $x_\infty$  de  $f$  et vérifie*

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^\infty \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq (8\pi + 2) \|x_0 - x_\infty\|.$$

Dans le problème précédent, le randonneur se déplace sur le graphe (dans  $\mathbb{R}^3$ ) d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Le fait que la vallée soit fermée correspond à l'hypothèse de coercivité (qui empêche les trajectoires de partir à l'infini), l'absence de "plat" oblige les trajectoires à aller au fond de la vallée (sans être arrêtées par un point critique qui n'est pas un minimum), une fonction quasiconvexe est exactement une fonction dont les sous-ensembles de niveaux sont convexes, et enfin la régularité de la topographie se traduit par l'hypothèse  $C^{1,1}$ . Cette dernière hypothèse permet de bien définir les trajectoires dans le cas quasiconvexe; dans le cas convexe, cette hypothèse peut être relaxée (quitte à changer (4.2) en une inclusion différentielle, on sait déterminer les trajectoires de gradient de fonctions convexes non lisses [Bré73, CLSW98]).

À l'aide de l'estimation du théorème, on peut alors résoudre le problème posé. On a, en utilisant (4.2),

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = -\|\dot{\gamma}(t)\|^2,$$

et la distance  $\ell$  que le randonneur a à parcourir est

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^\infty \sqrt{\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \|\dot{\gamma}(t)\|^4} dt \leq \int_0^\infty \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \int_0^\infty \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \\ &\leq (8\pi + 2)\|x_0 - x_\infty\| + f(x_0) - f(x_\infty).\end{aligned}$$

Avec  $\|x_0 - x_\infty\| \approx 2,5$  km et  $f(x_0) - f(x_\infty) \approx 0,5$  km, on obtient  $\ell \leq 69$  km. Cela peut sembler beaucoup mais il peut se consoler en se disant qu'il aurait pu marcher beaucoup plus si les lignes de niveaux n'avaient pas été convexes!

En effet, pour une fonction  $f$  coercive  $C^\infty$  non-convexe, la longueur des trajectoires de gradient peut être infinie. Palis et De Melo [PdM82, p.14] donnent un exemple célèbre où les trajectoires s'enroulent autour d'un cercle dans le plan. On peut avoir une longueur infinie même si la fonction a un unique point critique qui est son minimum comme pour  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée en coordonnées polaires par

$$(4.5) \quad f(r, \theta) = e^{-1/r}(1 + r + \sin(\frac{1}{r} + \theta))$$

(cf. [20, Section 7.1]).

Il est surprenant que ce genre de résultats dans le cas convexe en dimension finie ne soient pas déjà connus. Mais ils ne semblent pas évidents à établir (malgré nos efforts, nous n'avons réussi à traiter que le cas de dimension 2) et certains sont contre-intuitifs. Par exemple, nous avons pu construire une fonction convexe  $f$  ayant un unique minimum en l'origine autour duquel les trajectoires de gradient s'enroulent en spiralant. Cet exemple montre qu'on ne peut espérer une version convexe de la conjecture de Thom qui affirme, qu'en plus de la convergence de  $\gamma(t)$  vers un point  $x_\infty$ , les directions

$$\frac{\gamma(t) - x_\infty}{\|\gamma(t) - x_\infty\|}$$

convergent également (cette conjecture a été prouvée dans le cas analytique réel en dimension  $N$  par Kurdyka, Mostowski et Parusiński [KMP00]). La construction d'une telle fonction  $f$  utilise le Théorème de Torralba [Tor96] que nous avons déjà utilisé dans [18]. L'idée est de commencer par construire une fonction convexe sur le disque unité dont une trajectoire dévie d'un angle  $\theta > 0$  sur l'anneau  $A(1/2, 1)$  (bordé par les cercles centrés en l'origine de rayons  $1/2$  et  $1$ ) tout en étant radiale près des bords de l'anneau. Ensuite, en faisant une homothétie de rapport  $1/2$  des ensembles de niveaux de cette fonction dans  $A(1/2, 1)$ , puis une rotation de  $\theta$  de manière à bien recoller les trajectoires, on arrive à construire une fonction convexe dont une trajectoire dévie de  $2\theta$  dans l'anneau  $A(1/4, 1)$ . Et ainsi de suite. Le procédé de construction est justifié par le Théorème de Torralba. Cf. Figure 12 pour une illustration et [20, Section 7.2] pour des détails.

Avant de donner une idée de la preuve du Théorème 4.2, rappelons les résultats existants sur le sujet. Comme nous l'avons dit plus haut, la question de la longueur des trajectoires de gradient semble peu abordée dans la littérature, sauf dans le cas analytique car c'est une conséquence directe de l'inégalité de Łojasiewicz (1.41). On peut le voir simplement par le calcul suivant, pour une trajectoire de gradient  $\gamma$  restant dans  $U$  :

$$-\frac{1}{1-\rho} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))^{1-\rho} = -\langle \dot{\gamma}(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle f(\gamma(t))^{-\rho} = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 f(\gamma(t))^{-\rho} \geq C \|\dot{\gamma}(t)\|,$$

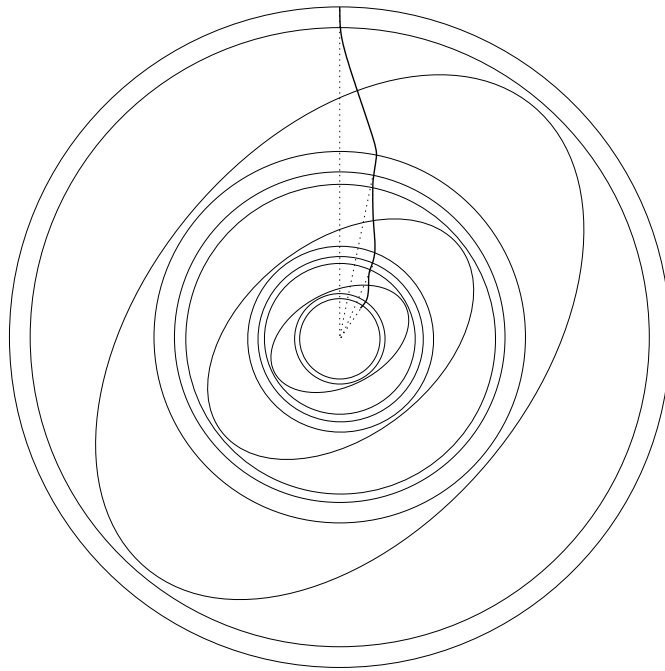


FIG. 12

Nous pouvons en conséquence conclure positivement si  $f$  est convexe et satisfait (4.3).

Il existe un autre cas, dans le cadre hilbertien, pour lequel les trajectoires sont de longueur finie. Cette question est intéressante en analyse fonctionnelle car elle entraîne la convergence de forte de  $\gamma(t)$ . Plus précisément, Bruck [Bru75] a prouvé que, pour toute fonction convexe coercive  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma(t)$  convergeait faiblement vers un minimum de  $f$ . Il est immédiat de voir que, si la longueur de la trajectoire est finie, cette convergence est forte. Ce n'est pas toujours le cas. Baillon [Bai78] construit un contre-exemple dans un Hilbert pour lequel la convergence est seulement faible. Mais, dans le cas où l'ensemble des minima de  $f$  est d'intérieur non vide (*i.e.* contient une boule  $B(0, r)$ ), alors

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \frac{\|x_0\|^2}{2r}.$$

Ce résultat apparaît sous une forme un peu différente dans Brézis [Bré71, Bré73] et nous en donnons une démonstration élémentaire dans [18, Theorem 27]. Néanmoins, le cas du Théorème 4.2, où  $\operatorname{argmin} f$  peut être réduit à un point, n'est pas couvert.

Pour prouver le Théorème 4.2, plutôt que d'utiliser la convexité de  $f$ , nous exploitons la convexité des ensembles de niveaux de  $f$ ; c'est pourquoi le résultat reste valable pour des fonctions quasi-convexes. En fait, nous introduisons la notion de courbes auto-contractantes (“self contracted”) qui sont des courbes  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , où  $I$  est un intervalle de  $[0, +\infty)$  qui satisfont, pour tous  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  de  $I$ ,

$$\|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\| \leq \|\gamma(t_1) - \gamma(t_3)\|.$$

Le principal résultat, qui entraîne le Théorème 4.2, est le suivant

**Théorème 4.3.** [20, Theorem 1.3] *Toute courbe auto-contractante planaire bornée est de longueur finie.*

La preuve repose sur une étude fine de ces courbes à l'aide de géométrie élémentaire du plan. Une généralisation en dimension plus grande que 2 nécessiterait d'autres outils.

**4.3. Commentaires et perspectives.** Pour enchaîner sur le paragraphe précédent, nous aimerions bien réussir à prouver le Théorème 4.3 en dimension finie quelconque. Cela ne semble pas évident mais nous pensons que cela doit être vrai.

Citons quelques références pour l'application de l'inégalité de Łojasiewicz : pour l'optimisation, voir Absil, Mahony et Andrews [AMA05], Bolte, Daniilidis et Lewis [BDL06a], Attouch et Bolte [AB] ; pour les équations différentielles, voir Huang [Hua06]. Concernant l'application aux EDP, en plus du travail fondateur de Simon [Sim83], citons les travaux de Chill, Haraux, Jendoubi et Kavian [Jen98b, Jen98a, HJ99, HJ01, HJK03, Chi03, HJ07, CJ07] et les références qu'ils contiennent. À la suite de [18], nous avons réuni tous les ingrédients nécessaires pour espérer obtenir de nouveaux résultats de convergence pour (1.43).

## 5. NOTATIONS

$N$	: Dans tout le mémoire, $N$ représente la dimension de l'espace $\mathbb{R}^N$ .
$T$	: Désigne le temps final pour le problème d'évolution considéré.
$A \setminus B$	: $\{x \in A, x \notin B\}$ (Ensemble $A$ privé de $B$ ).
$A + B$	: $\{a + b : a \in A, b \in B\}$ (Somme des ensembles $A$ et $B$ ).
$\overline{A}, \text{int}(A), \partial A$	: Désigne respectivement l'adhérence, l'intérieur et le bord topologique ( $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$ ) de l'ensemble $A$ .
$A \subset\subset B$	: Signifie que $B$ contient strictement $A$ i.e. $\overline{A} \subset \text{int}(B)$ .
$\mathbb{1}_A$	: Fonction caractéristique de l'ensemble $A$ valant 1 sur $A$ et 0 sinon.
$ \cdot $ ou $\ \cdot\ , \langle \cdot, \cdot \rangle$	: Norme euclidienne et produit scalaire sur l'espace considéré $\mathbb{R}^N$ ou l'espace de Hilbert $H$ .
$B(x, R)$	: $\{y :  x - y  < R\}$ (Boule euclidienne ouverte de centre $x$ et de rayon $R > 0$ ).
$S(x, R)$	: $\{y :  x - y  = R\}$ (Sphère euclidienne de centre $x$ et de rayon $R > 0$ ).
$\text{dist}(x, A)$	: $\inf_{a \in A}  x - a $ (distance de $x$ à l'ensemble $A$ ).
$I, I_N$	: Matrice identité de taille dépendant du contexte et de taille $N$ .
$\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_N^+$	: Ensembles des matrices symétriques de taille $N$ et matrices symétriques positives. Ces ensembles sont munis de l'ordre usuel : $X \leq Y \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}^N, \langle Xp, p \rangle \leq \langle Yp, p \rangle$ .
$o_\tau(1)$	: $m(\tau)$ où $m$ est une fonction qui tend vers 0 quand $\tau \rightarrow 0$ .
$\{f = \lambda\}$	: $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = \lambda\}$ pour toute fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ et constante $\lambda \in \mathbb{R}$ .
$\text{argmin } f$	: $\{x : f(x) = \inf f\}$ (L'ensemble où la fonction $f$ atteint son minimum).
$\mathcal{L}^N, \mathcal{H}^N$	: Mesure de Lebesgue et de Hausdorff $N$ -dimensionnelle.
$d_{\mathcal{H}}(A, B)$	: Distance de Hausdorff entre les ensembles compacts $A$ et $B$ .
$ f _\infty$	: $\text{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$ (Norme sup de la fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ).
$ f _{L^1(\mathbb{R}^N)}$	: $\int_{\mathbb{R}^N}  f(x)  dx$ (Norme $L^1$ de la fonction $f$ ).
$C(\Omega)$	: Ensemble des fonctions continues sur $\Omega$ .
$BUC$	: Fonctions bornées uniformément continues
$C^{1,\beta}(\Omega)$	: Ensemble des fonctions $C^1$ sur l'ouvert $\Omega$ dont la dérivée est $\beta$ -höldérienne (si $\beta = 1$ , la dérivée est lipschitzienne).
$L^\infty(\Omega; [0, 1])$	: Ensemble des fonctions mesurables bornées sur $\Omega$ à valeurs dans $[0, 1]$ .
$KL(0, r_0)$	: $\{\varphi : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ continue, } \varphi(0) = 0, \varphi \in C^1(0, r_0), \varphi' > 0\}$ .
$\text{vol}(A)$	: $\int_A dx$ (Volume de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ ).
$\text{per}(A)$	: $\mathcal{H}^{N-1}(A)$ (Périmètre de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ ).

## LISTE DE MES TRAVAUX

- [1] O. Ley. Lower-bound gradient estimates for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications to the regularity of propagating fronts. *Adv. Differential Equations*, 6(5) :547–576, 2001.
- [2] O. Ley. A counter-example to the characterization of the discontinuous value function of control problems with reflection. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335 :469–473, 2002.
- [3] G. Barles, S. Biton, and O. Ley. Quelques résultats d’unicité pour l’équation du mouvement par courbure moyenne dans  $\mathbb{R}^N$ . In *Canum 2000 : Actes du 32e Congrès National d’Analyse Numérique (Port d’Albret)*, volume 11 of *ESAIM Proc.*, pages 1–12 (electronic). Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 2002.
- [4] G. Barles, S. Biton, and O. Ley. A geometrical approach to the study of unbounded solutions of quasilinear parabolic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 162(4) :287–325, 2002.
- [5] G. Barles, S. Biton, and O. Ley. Uniqueness for parabolic equations without growth condition and applications to the mean curvature flow in  $\mathbb{R}^2$ . *J. Differential Equations*, 187(2) :456–472, 2003.
- [6] G. Barles, S. Biton, M. Bourgoing, and O. Ley. Uniqueness results for quasilinear parabolic equations through viscosity solutions’ methods. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 18(2) :159–179, 2003.
- [7] S. Biton, E. Chasseigne, and O. Ley. Uniqueness without growth condition for the mean curvature equation with radial initial data. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(9-10) :1503–1526, 2003.
- [8] G. Barles and O. Ley. Nonlocal first-order Hamilton-Jacobi equations modelling dislocations dynamics. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(8) :1191–1208, 2006.
- [9] F. Da Lio and O. Ley. Uniqueness results for second-order Bellman-Isaacs equations under quadratic growth assumptions and applications. *SIAM J. Control Optim.*, 45(1) :74–106, 2006.
- [10] P. Cardaliaguet and O. Ley. Some flows in shape optimization. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 183(1) :21–58, 2007.
- [11] P. Cardaliaguet and O. Ley. On the energy of a flow arising in shape optimization. *Interfaces Free Bound.*, 10 :221–241, 2008.
- [12] S. Biton, P. Cardaliaguet, and O. Ley. Non fattening condition for the generalized evolution by mean curvature and applications. *Interfaces Free Bound.*, 10 :1–14, 2008.
- [13] G. Barles, P. Cardaliaguet, O. Ley, and R. Monneau. Global existence results and uniqueness for dislocation equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 40(1) :44–69, 2008.
- [14] O. Ley. Weak solutions for dislocation type equations. Proceedings, Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications Vol.xx, to appear.
- [15] F. Camilli, O. Ley, and P. Loreti. Homogenization of monotone systems of Hamilton-Jacobi equations. *To appear in ESAIM Control Optim. Calc. Var.*
- [16] G. Barles, P. Cardaliaguet, O. Ley, and A. Monteillet. Uniqueness results for nonlocal Hamilton-Jacobi equations. *Preprint*, 2008.
- [17] G. Barles, P. Cardaliaguet, O. Ley, and A. Monteillet. Existence of weak solutions for general nonlocal Hamilton-Jacobi equations. *Preprint*, 2008.
- [18] J. Bolte, A. Daniilidis, O. Ley, and L. Mazet. Characterizations of Łojasiewicz inequalities and applications. *CRM Preprint No. 792*, 2008.
- [19] F. Da Lio and O. Ley. Uniqueness results for convex Hamilton-Jacobi equations under  $p > 1$  growth conditions on data. *Preprint*, 2008.
- [20] A. Daniilidis, O. Ley, and S. Sabourau. Asymptotic behaviour of self-contracted planar curves. *Preprint*, 2008.

Ces publications sont disponibles (dans leur version prépublication) sur ma page internet à l’adresse [http ://www.lmpt.univ-tours.fr/~ley](http://www.lmpt.univ-tours.fr/~ley) ou sur le serveur d’articles en lignes HAL [http ://hal.archives-ouvertes.fr/](http://hal.archives-ouvertes.fr/)





## BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- [AB] H. Attouch and J. Bolte. On the convergence of the proximal algorithm for nonsmooth functions involving analytic features. *To appear*.
- [AB03] O. Alvarez and M. Bardi. Singular perturbations of nonlinear degenerate parabolic PDEs : a general convergence result. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 170(1) :17–61, 2003.
- [AC81] H. W. Alt and L.A. Caffarelli. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.*, 325 :105–144, 1981.
- [AC84] J.-P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions*, volume 264 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Set-valued maps and viability theory.
- [AC99] P. Albano and P. Cannarsa. Singularities of semiconcave functions in Banach spaces. In *Stochastic analysis, control, optimization and applications*, Systems Control Found. Appl., pages 171–190. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999.
- [AC04] D. Azé and J.-N. Corvellec. Characterizations of error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(3) :409–425 (electronic), 2004.
- [ACM05] O. Alvarez, P. Cardaliaguet, and R. Monneau. Existence and uniqueness for dislocation dynamics with nonnegative velocity. *Interfaces Free Bound.*, 7 :415–434, 2005.
- [ACMR06] O. Alvarez, E. Carlini, R. Monneau, and E. Rouy. A convergent scheme for a non local Hamilton Jacobi equation modelling dislocation dynamics. *Numer. Math.*, 104(4) :413–444, 2006.
- [AF02] B. Andrews and M. Feldman. Nonlocal geometric expansion of convex planar curves. *J. Differential Equations*, 182(2) :298–343, 2002.
- [AGS08] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2008.
- [AHLBM04] O. Alvarez, P. Hoch, Y. Le Bouar, and R. Monneau. Résolution en temps court d’une équation de Hamilton-Jacobi non locale décrivant la dynamique d’une dislocation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(9) :679–684, 2004.
- [AHLBM06] O. Alvarez, P. Hoch, Y. Le Bouar, and R. Monneau. Dislocation dynamics : short-time existence and uniqueness of the solution. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 181(3) :449–504, 2006.
- [AJT02] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. A level-set method for shape optimization. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(12) :1125–1130, 2002.
- [AJT04] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *J. Comput. Phys.*, 194(1) :363–393, 2004.
- [All02] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [All07] G. Allaire. *Conception optimale de structures*, volume 58 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. With the collaboration of Marc Schoenauer (INRIA) in the writing of Chapter 8.
- [Alv96] O. Alvarez. A quasilinear elliptic equation in  $\mathbf{R}^N$ . *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 126(5) :911–921, 1996.
- [Alv97] O. Alvarez. Bounded-from-below viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Differential Integral Equations*, 10(3) :419–436, 1997.
- [AMA05] P.-A. Absil, R. Mahony, and B. Andrews. Convergence of the iterates of descent methods for analytic cost functions. *SIAM J. Optim.*, 16(2) :531–547 (electronic), 2005.

- [Amb95] L. Ambrosio. Minimizing movements. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5), 19 :191–246, 1995.
- [Ang94] S. B. Angenent. Some recent results on mean curvature flow. *RAM Res. Appl. Math.*, 30 :1–18, 1994.
- [ATW93] F. Almgren, J. Taylor, and L. Wang. Curvature-driven flows : a variational approach. *SIAM J. Control Optim.*, 31(2) :387–438, 1993.
- [Bai78] J.-B. Baillon. Un exemple concernant le comportement asymptotique de la solution du problème  $du/dt + \partial\varphi(u) \ni 0$ . *J. Funct. Anal.*, 28(3) :369–376, 1978.
- [Bar85] G. Barles. Remark on a flame propagation model. *Rapport INRIA*, 464, 1985.
- [Bar90] G. Barles. An approach of deterministic control problems with unbounded data. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7(4) :235–258, 1990.
- [Bar94] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [Bar97] G. Barles. Solutions de viscosité et équations elliptiques du second ordre. *Cours de DEA, Université Paul Sabatier de Toulouse*, 1997.
- [Bar06] G. Barles. A new stability result for viscosity solutions of nonlinear parabolic equations with weak convergence in time. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(3) :173–178, 2006.
- [BBS95] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano, and N. Samsoen. Critical stock price near expiration. *Math. Finance*, 5(2) :77–95, 1995.
- [BCD97] M. Bardi and I. Capuzzo Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.
- [BCE<sup>+</sup>97] M. Bardi, M. G. Crandall, L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. *Viscosity solutions and applications*, volume 1660 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. Lectures given at the 2nd C.I.M.E. Session held in Montecatini Terme, June 12–20, 1995, Edited by I. Capuzzo Dolcetta and P. L. Lions, Fondazione C.I.M.E.. [C.I.M.E. Foundation].
- [BCQ01] R. Buckdahn, P. Cardaliaguet, and M. Quincampoix. A representation formula for the mean curvature motion. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(4) :827–846 (electronic), 2001.
- [BDL97] M. Bardi and F. Da Lio. On the Bellman equation for some unbounded control problems. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 4(4) :491–510, 1997.
- [BDL06a] J. Bolte, A. Daniilidis, and A. Lewis. The Łojasiewicz inequality for nonsmooth subanalytic functions with applications to subgradient dynamical systems. *SIAM J. Optim.*, 17(4) :1205–1223 (electronic), 2006.
- [BDL06b] J. Bolte, A. Daniilidis, and A. Lewis. A nonsmooth Morse-Sard theorem for subanalytic functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 321(2) :729–740, 2006.
- [BDLS07] J. Bolte, A. Daniilidis, A. Lewis, and M. Shiota. Clarke subgradients of stratifiable functions. *SIAM J. Optim.*, 18(2) :556–572 (electronic), 2007.
- [Ben82] A. Bensoussan. *Stochastic control by functional analysis methods*, volume 11 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.
- [Beu58] A. Beurling. On free-boundary problems for the Laplace equations. *Sem. analytic functions*, 1 :248–263, 1958.
- [BH08] P. Briand and Y. Hu. Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions. *Probab. Theory Related Fields*, 141(3-4) :543–567, 2008.
- [BK91] L. Bronsard and R. V. Kohn. Motion by mean curvature as the singular limit of Ginzburg-Landau dynamics. *J. Differential Equations*, 90(2) :211–237, 1991.
- [BK05] F. E. Benth and K. H. Karlsen. A PDE representation of the density of the minimal entropy martingale measure in stochastic volatility markets. *Stochastics*, 77(2) :109–137, 2005.

- [BN00] G. Bellettini and M. Novaga. Some aspects of De Giorgi's barriers for geometric evolutions. In *Calculus of variations and partial differential equations (Pisa, 1996)*, pages 115–151. Springer, Berlin, 2000.
- [Bou08a] M. Bourgoing. Viscosity solutions of fully nonlinear second order parabolic equations with  $L^1$  dependence in time and Neumann boundary conditions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21(3) :763–800, 2008.
- [Bou08b] M. Bourgoing. Viscosity solutions of fully nonlinear second order parabolic equations with  $L^1$  dependence in time and Neumann boundary conditions. Existence and applications to the level-set approach. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21(4) :1047–1069, 2008.
- [BP87] G. Barles and B. Perthame. Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 21(4) :557–579, 1987.
- [BP88] G. Barles and B. Perthame. Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J. Control Optim.*, 26(5) :1133–1148, 1988.
- [Bra78] K. A. Brakke. *The motion of a surface by its mean curvature*, volume 20 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.
- [Bré71] H. Brézis. Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations. In *Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971)*, pages 101–156. Academic Press, New York, 1971.
- [Bré73] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [Bru75] R. E. Bruck, Jr. Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space. *J. Funct. Anal.*, 18 :15–26, 1975.
- [BS98] G. Barles and P. E. Souganidis. A new approach to front propagation problems : theory and applications. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141(3) :237–296, 1998.
- [BSS93] G. Barles, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Front propagation and phase field theory. *SIAM J. Control Optim.*, 31(2) :439–469, 1993.
- [Car00] P. Cardaliaguet. On front propagation problems with nonlocal terms. *Adv. Differential Equations*, 5(1-3) :213–268, 2000.
- [Car01] P. Cardaliaguet. Front propagation problems with nonlocal terms. II. *J. Math. Anal. Appl.*, 260(2) :572–601, 2001.
- [CC06] P. Cannarsa and P. Cardaliaguet. Perimeter estimates for reachable sets of control systems. *J. Convex Anal.*, 13 :253–267, 2006.
- [CDLFM07] P. Cardaliaguet, F. Da Lio, N. Forcadel, and R. Monneau. Dislocation dynamics : a non-local moving boundary. In *Free boundary problems*, volume 154 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 125–135. Birkhäuser, Basel, 2007.
- [CDP89] P. Cannarsa and G. Da Prato. Nonlinear optimal control with infinite horizon for distributed parameter systems and stationary Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Control Optim.*, 27(4) :861–875, 1989.
- [CF06] P. Cannarsa and H. Frankowska. Interior sphere property of attainable sets and time optimal control problems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(2) :350–370 (electronic), 2006.
- [CGG91] Y. G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33(3) :749–786, 1991.
- [Cha04] A. Chambolle. An algorithm for mean curvature motion. *Interfaces Free Bound.*, 6(2) :195–218, 2004.
- [Che91] X.-Y. Chen. Dynamics of interfaces in reaction diffusion systems. *Hiroshima Math. J.*, 21(1) :47–83, 1991.

- [Chi03] R. Chill. On the Łojasiewicz-Simon gradient inequality. *J. Funct. Anal.*, 201(2) :572–601, 2003.
- [CIL92] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1) :1–67, 1992.
- [CJ07] R. Chill and M. A. Jendoubi. Convergence to steady states of solutions of non-autonomous heat equations in  $\mathbb{R}^N$ . *J. Dynam. Differential Equations*, 19(3) :777–788, 2007.
- [CK01] K.-S. Chou and Y.-C. Kwong. On quasilinear parabolic equations which admit global solutions for initial data with unrestricted growth. *Calc. Var.*, 12 :281–315, 2001.
- [CL83] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1) :1–42, 1983.
- [CL08] F. Camilli and P. Loreti. Comparison results for a class of weakly coupled systems of eikonal equations. *Hokkaido Math. J.*, 37(2) :349–362, 2008.
- [Cla83] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.
- [CLSW98] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyayev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. *Nonsmooth analysis and control theory*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [CM06] P. Cardaliaguet and C. Marchi. Regularity of the eikonal equation with Neumann boundary conditions in the plane : application to fronts with nonlocal terms. *SIAM J. Control Optim.*, 45(3) :1017–1038 (electronic), 2006.
- [CR06] P. Cardaliaguet and E. Rouy. Viscosity solutions of increasing flows of sets. Application of the Hele-Shaw problem for power-law fluids. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(1) :143–165 (electronic), 2006.
- [CS04] P. Cannarsa and C. Sinestrari. *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.
- [CV95] L. A. Caffarelli and J. L. Vázquez. A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(2) :411–441, 1995.
- [DG90] E. De Giorgi. Conjectures on flow by mean curvature. *Unpublished*, 1990.
- [DLKS04] F. Da Lio, C. I. Kim, and D. Slepčev. Nonlocal front propagation problems in bounded domains with Neumann-type boundary conditions and applications. *Asymptot. Anal.*, 37(3-4) :257–292, 2004.
- [DLM02] F. Da Lio and W. M. McEneaney. Finite time-horizon risk-sensitive control and the robust limit under a quadratic growth assumption. *SIAM J. Control Optim.*, 40(5) :1628–1661 (electronic), 2002.
- [DMS95] P. De Mottoni and M. Schatzman. Geometrical evolution of developed interfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(5) :1533–1589, 1995.
- [DQZ06] A. L. Dontchev, M. Quincampoix, and N. Zlateva. Aubin criterion for metric regularity. *J. Convex Anal.*, 13(2) :281–297, 2006.
- [EG92] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [EH89] K. Ecker and G. Huisken. Mean curvature evolution of entire graphs. *Ann. of Math. (2)*, 130(3) :453–471, 1989.
- [EH91] K. Ecker and G. Huisken. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. *Invent. Math.*, 105(3) :547–569, 1991.
- [EKM97] N. El Karoui and L. Mazliak, editors. *Backward stochastic differential equations*, volume 364 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1997. Papers from the study group held at the University of Paris VI, Paris, 1995–1996.

- [EL91] H. Engler and S. M. Lenhart. Viscosity solutions for weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations. *Proc. London Math. Soc.* (3), 63(1) :212–240, 1991.
- [ES84] L. C. Evans and P. E. Souganidis. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 33(5) :773–797, 1984.
- [ES91] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I. *J. Differential Geom.*, 33(3) :635–681, 1991.
- [ES92] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. III. *J. Geom. Anal.*, 2(2) :121–150, 1992.
- [ES95] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. IV. *J. Geom. Anal.*, 5(1) :77–114, 1995.
- [ES97] J. Escher and G. Simonett. Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension. *Adv. Differential Equations*, 2(4) :619–642, 1997.
- [ESS92] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transitions and generalized motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(9) :1097–1123, 1992.
- [Eva89] L. C. Evans. The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 111(3-4) :359–375, 1989.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Fif88] P. C. Fife. *Dynamics of internal layers and diffusive interfaces*, volume 53 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1988.
- [Fit61] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes. *Biophys. J.*, 1 :445–466, 1961.
- [FM92] W. H. Fleming and W. M. McEneaney. Risk sensitive optimal control and differential games. In *Stochastic theory and adaptive control (Lawrence, KS, 1991)*, volume 184 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 185–197. Springer, Berlin, 1992.
- [FM07] N. Forcadel and A. Montillet. Minimizing movements for dislocation dynamics with a mean curvature term. *Preprint*, 2007.
- [FR75] W. H. Fleming and R. W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Applications of Mathematics, No. 1.
- [FR97] M. Flucher and M. Rumpf. Bernoulli’s free-boundary problem, qualitative theory and numerical approximation. *J. Reine Angew. Math.*, 486 :165–204, 1997.
- [FS93] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [GGI92] Y. Giga, S. Goto, and H. Ishii. Global existence of weak solutions for interface equations coupled with diffusion equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(4) :821–835, 1992.
- [GGIS91] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M.-H. Sato. Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(2) :443–470, 1991.
- [GH86] M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.*, 23(1) :69–96, 1986.
- [Gig06] Y. Giga. *Surface evolution equations*, volume 99 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. A level set approach.
- [Has75] S. P. Hastings. Some mathematical problems from neurobiology. *Amer. Math. Monthly*, 82(9) :881–895, 1975.

- [HJ99] A. Haraux and M. A. Jendoubi. Convergence of bounded weak solutions of the wave equation with dissipation and analytic nonlinearity. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 9(2) :95–124, 1999.
- [HJ01] A. Haraux and M. A. Jendoubi. Decay estimates to equilibrium for some evolution equations with an analytic nonlinearity. *Asymptot. Anal.*, 26(1) :21–36, 2001.
- [HJ07] A. Haraux and M. A. Jendoubi. On the convergence of global and bounded solutions of some evolution equations. *J. Evol. Equ.*, 7(3) :449–470, 2007.
- [HJK03] A. Haraux, M. A. Jendoubi, and O. Kavian. Rate of decay to equilibrium in some semilinear parabolic equations. *J. Evol. Equ.*, 3(3) :463–484, 2003. Dedicated to Philippe B enilan.
- [HL92] J. R. Hirth and L. Lothe. *Theory of dislocations*. Krieger, Malabar, Florida, second edition, 1992.
- [HP05] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes—Une analyse g om etrique*. Springer-Verlag, Paris, 2005.
- [Hua06] S.-Z. Huang. *Gradient inequalities*, volume 126 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. With applications to asymptotic behavior and stability of gradient-like systems.
- [Hui84] G. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differential Geom.*, 20(1) :237–266, 1984.
- [IK91a] H. Ishii and S. Koike. Remarks on elliptic singular perturbation problems. *Appl. Math. Optim.*, 23(1) :1–15, 1991.
- [IK91b] H. Ishii and S. Koike. Viscosity solutions for monotone systems of second-order elliptic PDEs. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(6-7) :1095–1128, 1991.
- [Ilm92] T. Ilmanen. Generalized flow of sets by mean curvature on a manifold. *Indiana Univ. Math. J.*, 41 :671–705, 1992.
- [Ilm93a] T. Ilmanen. Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke’s motion by mean curvature. *J. Differential Geom.*, 38(2) :417–461, 1993.
- [Ilm93b] T. Ilmanen. The level-set flow on a manifold. In *Differential geometry : partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990)*, volume 54 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 193–204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [Ilm94] T. Ilmanen. Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 108(520), 1994.
- [IM01] H. Ishii and T. Mikami. A mathematical model of the wearing process of a nonconvex stone. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(4) :860–876 (electronic), 2001.
- [IM04a] H. Ishii and T. Mikami. A level set approach to the wearing process of a nonconvex stone. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 19(1) :53–93, 2004.
- [IM04b] H. Ishii and T. Mikami. Motion of a graph by  $R$ -curvature. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 171(1) :1–23, 2004.
- [Iof00] A. D. Ioffe. Metric regularity and subdifferential calculus. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(3(333)) :103–162, 2000.
- [Iou00] D. V. Iourtchenko. Stochastic optimal bounded control for a system with the Boltz cost function. *J. Vib. Control*, 6(8) :1195–1204, 2000.
- [IS95] H. Ishii and P. E. Souganidis. Generalized motion of non compact hypersurfaces with velocity having arbitrary growth on the curvature tensor. *T ohuko Math. J.*, 47 :227–250, 1995.
- [Ish84] H. Ishii. Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 33(5) :721–748, 1984.
- [Ish85] H. Ishii. Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets. *Bull. Fac. Sci. Eng. Chuo Univ.*, 28 :33–77, 1985.

- [Ish87] H. Ishii. Perron's method for Hamilton-Jacobi equations. *Duke Math. J.*, 55(2) :369–384, 1987.
- [Ish92] H. Ishii. Perron's method for monotone systems of second-order elliptic partial differential equations. *Differential Integral Equations*, 5(1) :1–24, 1992.
- [Ish97] H. Ishii. Comparison results for Hamilton-Jacobi equations without growth condition on solutions from above. *Appl. Anal.*, 67(3-4) :357–372, 1997.
- [Jen98a] M. A. Jendoubi. Convergence of global and bounded solutions of the wave equation with linear dissipation and analytic nonlinearity. *J. Differential Equations*, 144(2) :302–312, 1998.
- [Jen98b] M. A. Jendoubi. A simple unified approach to some convergence theorems of L. Simon. *J. Funct. Anal.*, 153(1) :187–202, 1998.
- [Joh91] F. John. *Partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1991.
- [Kim03] I. C. Kim. Uniqueness and existence results on the Hele-Shaw and the Stefan problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 168(4) :299–328, 2003.
- [Kim05] I. C. Kim. A free boundary problem with curvature. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(1-3) :121–138, 2005.
- [KMP00] K. Kurdyka, T. Mostowski, and A. Parusiński. Proof of the gradient conjecture of R. Thom. *Ann. of Math. (2)*, 152(3) :763–792, 2000.
- [Kob00] M. Kobylanski. Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth. *Ann. Probab.*, 28(2) :558–602, 2000.
- [Koi04] S. Koike. *A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions*. MSJ Memoirs vol. 13. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [Kry80] N. V. Krylov. *Controlled diffusion processes*, volume 14 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the Russian by A. B. Aries.
- [Kry01] N. V. Krylov. Stochastic linear controlled systems with quadratic cost revisited. In *Stochastics in finite and infinite dimensions*, Trends Math., pages 207–232. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [Kur98] K. Kurdyka. On gradients of functions definable in o-minimal structures. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(3) :769–783, 1998.
- [Lar74] R. W. Lardner. *Mathematical theory of dislocations and fracture*. University of Toronto Press, Toronto, Ont., 1974. Mathematical Expositions, No. 17.
- [Lio82] P.-L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982.
- [Lio83a] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. I. The dynamic programming principle and applications. *Comm. Partial Differential Equations*, 8(10) :1101–1174, 1983.
- [Lio83b] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. II. Viscosity solutions and uniqueness. *Comm. Partial Differential Equations*, 8(11) :1229–1276, 1983.
- [LL97] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses Édition Marketing, Paris, second edition, 1997.
- [Loj63] S. Łojasiewicz. Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. In *Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962)*, pages 87–89. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1963.
- [Loj84] S. Łojasiewicz. Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique. In *Geometry seminars, 1982–1983 (Bologna, 1982/1983)*, pages 115–117. Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1984.



- [LPV86] P.-L. Lions, B. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan. Homogenization of Hamilton-Jacobi equations. *Unpublished*, 1986.
- [McE95a] W. M. McEneaney. Robust control and differential games on a finite time horizon. *Math. Control Signals Systems*, 8(2) :138–166, 1995.
- [McE95b] W. M. McEneaney. Uniqueness for viscosity solutions of nonstationary Hamilton-Jacobi-Bellman equations under some a priori conditions (with applications). *SIAM J. Control Optim.*, 33(5) :1560–1576, 1995.
- [McE98] W. M. McEneaney. A uniqueness result for the Isaacs equation corresponding to nonlinear  $H_\infty$  control. *Math. Control Signals Systems*, 11(4) :303–334, 1998.
- [Nab69] F. R. N. Nabarro. *Theory of crystal dislocations*. Clarendon Press, Oxford, 1969.
- [Nag96] H. Nagai. Bellman equations of risk-sensitive control. *SIAM J. Control Optim.*, 34(1) :74–101, 1996.
- [NAY60] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line stimulating nerve axons. *Proc. IRL*, 50 :2061–2070, 1960.
- [Nun90] D. Nunziante. Uniqueness of viscosity solutions of fully nonlinear second order parabolic equations with discontinuous time-dependence. *Differential Integral Equations*, 3(1) :77–91, 1990.
- [Nun92] D. Nunziante. Existence and uniqueness of unbounded viscosity solutions of parabolic equations with discontinuous time-dependence. *Nonlinear Anal.*, 18(11) :1033–1062, 1992.
- [Øks98] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1998. An introduction with applications.
- [OS88] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comp. Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [PdM82] J. Palis, Jr. and W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1982. An introduction, Translated from the Portuguese by A. K. Manning.
- [Pha02] H. Pham. Smooth solutions to optimal investment models with stochastic volatilities and portfolio constraints. *Appl. Math. Optim.*, 46(1) :55–78, 2002.
- [PP90] É. Pardoux and S. G. Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems Control Lett.*, 14(1) :55–61, 1990.
- [PP92] É. Pardoux and S. Peng. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In *Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991)*, volume 176 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 200–217. Springer, Berlin, 1992.
- [RLBF03] D. Rodney, Y. Le Bouar, and A. Finel. Phase field methods and dislocations. *Acta Materialia*, 51 :17–30, 2003.
- [RS00] F. Rampazzo and C. Sartori. Hamilton-Jacobi-Bellman equations with fast gradient-dependence. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(3) :1043–1077, 2000.
- [Shi06] K. Shimano. Homogenization and penalization of functional first-order PDE. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 13(1) :1–21, 2006.
- [Sim83] L. Simon. Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems. *Ann. of Math. (2)*, 118(3) :525–571, 1983.
- [Sle03] D. Slepčev. Approximation schemes for propagation of fronts with nonlocal velocities and Neumann boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 52(1) :79–115, 2003.
- [Son93] H. M. Soner. Motion of a set by the curvature of its boundary. *J. Differential Equations*, 101 :313–372, 1993.

- [Sou95] P. E. Souganidis. Interface dynamics in phase transitions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 1133–1144, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [Sro] A. Srouf. Nonlocal second-order Hamilton-Jacobi equations arising in tomographic reconstruction. *To appear in Nonlinear Anal.*
- [SS96] P. Soravia and P. E. Souganidis. Phase-field theory for FitzHugh-Nagumo-type systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(5) :1341–1359, 1996.
- [ST02] H. M. Soner and N. Touzi. Dynamic programming for stochastic target problems and geometric flows. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 4(3) :201–236, 2002.
- [ST03] H. M. Soner and N. Touzi. A stochastic representation for mean curvature type geometric flows. *Ann. Probab.*, 31(3) :1145–1165, 2003.
- [Tep75] D. E. Tepper. On a free boundary problem, the starlike case. *SIAM J. Math. Anal.*, 6 :503–505, 1975.
- [TF80] J. J. Tyson and P. C. Fife. Target patterns in a realistic model of the Belousov-Zhabotinskii reaction. *J. Chem. Phys.*, 73(5) :2224–2237, 1980.
- [Tor96] D. Torralba. Convergence épigraphique et changements d'échelle en analyse variationnelle et optimisation. *Thèse, Université de Montpellier 2*, 1996.
- [YZ99] J. Yong and Xun Y. Zhou. *Stochastic controls*, volume 43 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999. Hamiltonian systems and HJB equations.

OLIVIER LEY

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE THÉORIQUE (UMR CNRS 6083). FÉDÉRATION DE RECHERCHE DENIS POISSON (FR 2964). UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS TOURS. PARC DE GRANDMONT, 37200 TOURS, FRANCE

*E-mail address:* ley@lmpt.univ-tours.fr

*URL:* <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~ley>